DISKRETE OPTIMIERUNG

Robert Weismantel

Unter einer Optimierungsaufgabe im mathematischen Sinne versteht man die Problemstellung, den maximalen oder minimalen Wert einer Funktion über einem zulässigen Bereich zu finden. Es ist offensichtlich, dass Problemstellungen dieser generischen Art für alle Bereiche unserer hochtechnologischen Welt prinzipielle Bedeutung erlangen. Die mathematische Behandlung einer solchen Problemstellung setzt allerdings voraus, dass der potentielle Anwender in der Lage ist, seine Optimierungsaufgabe quantitativ mittels Daten und eines mathematischen Modells zu formulieren.
Der Zusatz „diskrete Optimierung" ist keinesfalls im Gegensatz zur „indiskreten Optimierung" zu sehen. Vielmehr drückt das Adjektiv „diskret" in diesem Zusammenhang aus, dass Ressourcen, deren Nutzung optimiert werden soll, nicht beliebig teilbar sind. Insbesondere wird der Begriff „diskret" deutlich, wenn man sich vorstellt, dass die Optimierung mit Entscheidungen zu tun hat, die zu treffen sind. Eine Entscheidung kann nur getroffen werden oder nicht. Eine halbe Entscheidung gibt es nicht.
Somit steht „diskrete Optimierung" im Gegensatz zum Begriff „kontinuierliche Optimierung", einer Aufgabenstellung, bei der der zulässige Bereich der potentiellen Lösungen ein Kontinuum darstellt. Diese Unterscheidung in „kontinuierlich" und „diskret" ist keineswegs künstlich. Vielmehr sind Strukturresultate, Methodik und Algorithmen in den beiden Bereichen grundsätzlich verschieden. Selbst aus Perspektive der Anwendungen setzt sich die Unterscheidung fort.
Mit den nachfolgenden Ausführungen sollen einige Aspekte der Forschung im Bereich der diskreten Optimierung genauer beleuchtet werden, ohne dabei zu sehr in mathematische Details einzudringen. Genauer gesagt sollen folgende zwei Thesen exemplarisch besprochen werden.
These 1: Das diskrete Modell ist umfassend. Es eignet sich zur Modellierung vieler theoretischer und praktischer Szenarien.
These 2: Effiziente Algorithmen für diskrete Modelle basieren auf mathematischen Theorien. Letztere basieren auf der Interaktion vieler mathematischer Teilgebiete.

Beginnen wir mit der Analyse der ersten These anhand eines Beispiels.

Das Rucksackproblem: Ein Bergsteiger sieht sich bei der Vorbereitung seiner Tour vor die folgende Aufgabe gestellt: Um einen Berg besteigen zu können, benötigt er Nahrungsmittel und einen Rucksack. Wir nehmen an, dass der Bergsteiger aus einer festen Anzahl abgepackter Nahrungsmittel frei auswählen darf. Jedes der zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel hat ein Gewicht und einen Nährwert. Dem Bergsteiger steht ferner ein Rucksack zur Verfügung, den er mit Nahrungsmitteln beladen darf. Allerdings hat der Rucksack eine Obergrenze an Gesamtgewicht mit dem er beladen werden kann. Der Bergsteiger steht nun vor der Aufgabe, eine Auswahl an Nahrungsmitteln zu treffen, deren Gesamtgewicht die Rucksackkapazität nicht überschreitet und deren Nährwert größtmöglich ist.

Diese Fragestellung klingt zunächst künstlich und unrealistisch. Viele andere realistischere Fragen führen jedoch zu genau derselben mathematischen Problemstellung.
Wie kann man dies nachvollziehen? Ein erster Schritt in diese Richtung ist die Erstellung eines mathematischen Modells.

Beispiel: *Wir nehmen an, dass dem Bergsteiger fünf Nahrungsmittel zur Verfügung stehen. Die Gewichte dieser fünf Nahrungsmittel sind 3, 5, 8, 10 und 11 Einheiten. Die Nährwerte der Nahrungsmittel sind 4, 6, 7, 8, 9 Einheiten. Die Gewichtskapazität des Rucksacks sei 15 Einheiten.*

Für jedes der fünf Nahrungsmittel führen wir eine Variable ein mit der Interpretation
$x_1 = 1$, wenn wir Nahrungsmittel 1 in den Rucksack packen,
$= 0$, wenn wir Nahrungsmittel 1 nicht in den Rucksack packen.
. . .
$x_5 = 1$, wenn wir Nahrungsmittel 5 in den Rucksack packen,
$= 0$, wenn wir Nahrungsmittel 5 nicht in den Rucksack packen.

Die Nebenbedingung, dass wir maximal 15 Gewichtseinheiten in unseren Rucksack packen, lässt sich dann durch folgende Bedingung beschreiben:
$3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 11x_5 \leq 15$.

Den Nährwert zu maximieren, modellieren wir durch die Funktion
$\max\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5$.

Das diskrete Modell lautet somit
max $4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5$
unter den
Bedingungen $3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 11x_5 \leq 15$

$x_1 \in \{0,1\}$, $x_2 \in \{0,1\}$, $x_3 \in \{0,1\}$, $x_4 \in \{0,1\}$, $x_5 \in \{0,1\}$.
Das mathematische Modell ist abstrakt. Hinter

den Formeln verbirgt sich die konkrete Anwendung, welche in unserem Fall dem Rucksackproblem entsprach. Die Anwendung als solche ist jedoch nicht mehr sichtbar. Denkbar ist ebenfalls eine ganz andere Ausgangsfragestellung, die zum gleichen mathematischen Modell führt:
Gegeben sei ein LKW mit einer maximalen Beladung von 15 Tonnen. Dieser LKW soll von Magdeburg nach Dresden fahren. Um ihn zu beladen, stehen uns in einer Lagerhalle fünf Stückgüter zur Verfügung, welche 3 Tonnen, 5 Tonnen, 8 Tonnen, 10 Tonnen bzw. 11 Tonnen wiegen. Bei Ablieferung des entsprechenden Gutes in Dresden erhalten wir Speditionserträge von 400 Euro, 600 Euro, 700 Euro, 800 Euro bzw. 900 Euro. Wie sollen wir unseren LKW beladen, um bei Ablieferung der Güter in Dresden maximalen Profit zu erzielen? Diese Problemstellung führt zu genau demselben mathematischen Modell (in den Einheiten Tonnen und €/100) wie das Problem des Bergsteigers. Selbstverständlich können wir auch gedanklich einen LKW durch ein Datennetz in der Telekommunikation mit einer Datenübertragungskapazität ersetzen. Die Rolle der Güter wird dann von Datenpaketen bzw. Telefongesprächen gespielt, welche natürlicherweise ebenfalls das Netz mit einer vorgegebenen Einheit belasten.

Diese Beispiele illustrieren, dass in der Tat diskrete mathematische Modelle Teilprobleme vieler realistischer Szenarien beschreiben. Dies liefert ein erstes Indiz für die Richtigkeit der These 1.

Zur weiteren Untermauerung der ersten These sei an dieser Stelle auf die unlängst in Magdeburg eingerichtete DFG-Forschergruppe „Methoden der diskreten Mathematik für die Synthese und Führung verfahrenstechnischer Prozesse“ verwiesen. Der Rahmen dieses Forschungsprojekts ist geprägt durch die ständig steigenden Anforderungen an die Wirtschaftlichkeit und Umweltverträglichkeit der chemischen Produktion. Diese Situation verbunden mit hohen Anforderungen an die Produktqualität erfordert einerseits die systematische Synthese immer effizienterer verfahrenstechnischer Prozesse, andererseits die Entwicklung geeigneter Konzepte zur Prozessführung. In beiden Fällen spielen diskrete Komponenten eine wichtige Rolle. Im Falle der Prozessführung handelt es sich dabei um diskrete Eingriffe in die Prozessabläufe. Im Falle der Prozesssynthese handelt es sich um diskrete Entwurfsparameter, wie beispielsweise die Anzahl der Stufen oder der Zuläufe in einem Stofftrennapparat.

Zentrale Zielsetzung der Forschergruppe ist die Entwicklung neuer mathematischer Methoden zur Lösung verfahrenstechnischer Synthese- und Prozessführungsprobleme, bei denen diskrete Komponenten eine wichtige Rolle spielen. Die im Rahmen der Forschergruppe betrachteten Prozesssynthese- und Prozessführungsprobleme motivieren nicht nur die Entwicklung neuer mathematischer und systemtheoretischer Methoden. Sie dienen gleichzeitig auch zur Erprobung und Validierung dieser Methoden, so dass sich eine enge inhaltliche Verflechtung zwischen methodischen und anwendungsorientierten Aufgabenstellungen ergibt. In der Tat sind deshalb in der Forschergruppe Wissenschaftler aus den Fakultäten Mathematik, Verfahrens- und Systemtechnik sowie Elektrotechnik und Informationstechnik beteiligt. Eine Kooperation mit dem Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme Magdeburg ist personell und inhaltlich gewährleistet. Die interdisziplinäre Zusammenarbeit zwischen Anwendern (aus der Verfahrens- und der Regelungstechnik) und Methodenentwicklern (aus der Mathematik und der Systemtheorie) ist unerlässlich, da sich aus den verfahrenstechnischen Anwendungen komplexe diskrete Optimierungsmodelle ableiten. Dies ist ein weiterer Beleg, dass das diskrete Modell auf viele praktische Szenarien anwendbar ist. Typische realistische Modelle haben zwischen 500 und 5 000 Variablen und 10 000 bis 100 000 Gleichungen und können mit derzeitigen Standardverfahren der diskreten Optimierung nicht gelöst werden.

Im Folgenden wenden wir uns der Frage der Lösbarkeit diskreter Modelle zu und damit der zweiten von uns aufgestellten These. Ein effizientes Verfahren zur Lösung allgemeiner diskreter Modelle gibt es, nach derzeitiger wissenschaftlicher Überzeugung, nicht. Dennoch können viele praxisrelevante Probleme von allgemeinen Verfahren in vernünftiger Zeit gelöst werden. Der Erfolg dieser Algorithmen hängt wesentlich davon ab, Struktureigenschaften von Problemen oder Problemklassen zu erkennen und ausnutzen zu können. Zur Motivation und Illustration einiger algorithmischer Ideen beginnen wir mit der Frage, wie man das Problem des Bergsteigers lösen kann.

Ein erster Ansatz wäre sicherlich der, alle verschiedenen Auswahlen an Nahrungsmitteln zu untersuchen, zu probieren, ob diese die Kapazitätsschranke des Rucksacks nicht überschreiten, und schließlich deren Nährwert zu berechnen. Anschließend müsste der Bergsteiger die Auswahl mit dem größten Nährwert, die die Kapazitätsschranke nicht übersteigt, wählen.

Wie viele solcher Auswahlen gibt es?
Für jedes Nahrungsmittel haben wir die Möglichkeit, dieses in den Rucksack einzupacken oder eben nicht. Nehmen wir einmal an, dass dem Bergsteiger 100 Nahrungsmittel zur Verfügung stehen. Dann ergibt sich für die Anzahl an verschiedenen Kombinationen eine Zahl der Größenordnung 2^{100}. Diese Zahl ist bereits so groß, dass der Bergsteiger Zeit seines Lebens niemals dazu käme, alle Auswahlen durchzuprobieren. Deshalb muss er sich damit beschäftigen, effektive Methoden zur Lösung seines Problems zu entwickeln. Diese Fragestellung wird in der Algorithmischen Diskreten Mathematik

behandelt. Diese bietet zur Lösung einer solchen Fragestellung grundsätzlich zwei Ansätze, welche in den folgenden Ausführungen kurz dargestellt werden sollen.

Ein möglicher Ansatz, um eine gute Auswahl an Gegenständen zu treffen, erscheint der, die Nahrungsmittel hinsichtlich ihres Nährwerts und ihres Gewichts zu vergleichen. Ein vernünftiges Kriterium hierfür ist der Quotient aus Nährwert eines Nahrungsmittels und dem Gewicht des Nahrungsmittels. Dieser Quotient entspricht dem Nährwert pro Einheit an Gewicht eines Nahrungsmittels. Wenn wir nun unter zwei Nahrungsmitteln entscheiden müssen, welches von beiden dem anderen vorzuziehen ist, so erscheint es vernünftig, das mit dem größeren Quotienten zu wählen. Da unser Rucksack eine Gewichtsschranke hat, erscheint es ferner vernünftig, diese Quotienten der Größe nach von größer zu kleiner zu sortieren, um anschließend die Nahrungsmittel gemäß dieser Reihenfolge in unseren Rucksack einzupacken, natürlich nur solange die Gewichtsschranke nicht überschritten ist.

Fortsetzung des Beispiels: *In unserem einführenden Zahlenbeispiel sortieren wir zunächst die fünf Nahrungsmittel gemäß der Quotienten aus Nährwert und Gewicht. Wir erhalten als Quotienten für die Nahrungsmittel die Werte 4/3, 6/5, 7/8, 8/10 und 9/11. Diese sind bereits der Größe nach sortiert. Entsprechend dieser Reihenfolge wählen wir die Nahrungsmittel mit den Nummern 1 und 2 aus. Deren Gesamtgewicht ist 8 Einheiten, und die Nährwerte der beiden Nahrungsmittel ergeben zusammen 10 Einheiten. Da die Kapazität des Rucksacks 15 ist, passt kein weiteres Nahrungsmittel mehr in den Rucksack.*

Folgende Fragen bleiben zu analysieren.
(1) Wie gut ist diese Lösung?
(2) Was ist der maximale Nährwert, den die beste Lösung haben kann?
(3) Wie können wir eine bessere Lösung bzw. die beste Lösung finden?

Mit Hilfe der Quotienten aus Nährwert eines Nahrungsmittels und Gewicht des Nahrungsmittels lassen sich recht einfach die Fragen (1) und (2) beantworten.

Was ist der maximale Nährwert, den die beste Lösung haben kann? Sicherlich ist der Wert nicht größer als der Wert, den wir mit dem folgenden Verfahren ermitteln: Wir packen die Nahrungsmittel gemäß der Größe ihres Quotienten in unseren Rucksack ein, solange die Gewichtsschranke nicht überschritten ist. Das nächste Nahrungsmittel, das nicht mehr ganz in den Rucksack passt, erlauben wir nun so zu teilen, dass der gebrochene Anteil in den Rucksack passt. Den Nährwert, den wir mit dieser Methode erhalten, ist größer oder gleich dem Nährwert einer besten Lösung des Rucksackproblems.

Fortsetzung des Beispiels: *In unserem Zahlenbeispiel haben sich als Quotienten für die fünf Nahrungsmittel die Werte 4/3, 6/5, 7/8, 8/10 und 9/11 ergeben. Entsprechend dieser Reihenfolge wählen wir die Nahrungsmittel mit den Nummern 1 und 2 aus. Diese passen in unseren Rucksack, denn ihr Gesamtgewicht ist 8 Einheiten. Da die Kapazität des Rucksacks 15 Einheiten ist, verbleibt eine Restkapazität des Rucksacks von 7 Einheiten. Gemäß unserer Sortierung ist das nächstbeste Nahrungsmittel das mit der Nummer 3. Dieses hat Gewicht 8 Einheiten und passt daher nicht mehr ganz in unseren Rucksack. Würden wir nun erlauben, dieses Nahrungsmittel zu teilen, dann könnten wir noch 7/8 dieses Nahrungsmittels in unseren Rucksack aufnehmen. Der Nährwertanteil dieses gebrochenen Anteils wäre* $(7/8) \times 7 = 6 + 1/8$*. Somit erhalten wir als Obergrenze für den Nährwert, den die in unseren Rucksack eingepackten Nahrungsmittel erbringen können, einen Wert von*
$4 + 6 + (6 + 1/8) = 16 + 1/8$.
Unsere gegenwärtige Auswahl an Gegenständen hat einen Wert von $10 > \frac{1}{2}(16 + 1/8)$*. Dieser Nährwert ist also mindestens halb so gut wie der Nährwert der besten Auswahl an Nahrungsmitteln, deren Gesamtgewicht die Rucksackkapazität nicht überschreitet. Dies gibt eine erste Antwort auf die Fragen (1) und (2).*

Welche mathematischen Theorien verbergen sich hinter Lösungen der Fragestellungen (1), (2) und (3)? Warum basieren solche Theorien auf der Interaktion vieler mathematischer Teilgebiete? Auf diese beiden Fragen wollen wir im Folgenden kurz eingehen.

Unser Zahlenbeispiel illustriert, dass die Zahl 16 eine Obergrenze für den Nährwert einer besten Lösung sein muss. Die Zahl 16 haben wir gefunden, indem wir erlauben, gewisse Nahrungsmittel zu gebrochenen Anteilen in unseren Rucksack zu packen. Allgemein bedeutet dies, dass wir ein so genanntes lineares Programm ohne Ganzzahligkeitsbedingungen gelöst haben. Lineare Programme können beweisbar effektiv gelöst werden. Kommerzielle Codes sind durchaus in der Lage, lineare Programme mit hunderttausenden von Variablen und Ungleichungen bzw. Gleichungen in wenigen Minuten optimal zu lösen. Das Problem ist, dass diese Lösung des linearen Programms keine Lösung des diskreten Modells ist, da gewisse Variablen keine ganzzahligen Werte annehmen. An dieser Stelle kommt die Theorie der polyedrischen Kombinatorik ins Spiel.

Die polyedrische Kombinatorik beschäftigt sich mit dem Studium der konvexen Hülle der ganzzahligen Lösungen eines diskreten Optimierungsproblems. Diese konvexe Hülle der ganzzahligen Punkte definiert ein geometrisches Objekt, welches üblicherweise als Polyeder bezeichnet wird. Ein Polyeder kann nach dem berühmten Darstellungssatz von Hermann Weyl durch ein System linearer Gleichungen und Ungleichungen beschrieben werden. Kennt man ein solches

System, so lässt sich das diskrete Optimierungsproblem durch ein lineares Programm lösen. Obwohl die Existenz der Beschreibung eines Polyeders durch lineare Gleichungen und Ungleichungen gesichert ist, ist sie für die meisten in der Praxis auftretenden diskreten Probleme unbekannt. Um polyedrische Methoden für solche Probleme einsetzen zu können, gilt es, Familien von linearen Ungleichungen und Gleichungen zu finden, welche von allen Punkten des untersuchten Polyeders erfüllt werden.

Fortsetzung des Beispiels: *In unserem Zahlenbeispiel können wir recht elementar eine Reihe linearer Ungleichungen finden, welche von allen ganzzahligen Punkten, welche zulässig für das gegebene Rucksackproblem sind, erfüllt werden. Im Einzelnen handelt es sich um folgende Ungleichungen:*

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \le 2$$
$$x_3+x_4+x_5 \le 1$$
$$x_2 \qquad +x_5 \le 1$$

Warum gelten diese Ungleichungen für die ganzzahligen Lösungen des Rucksackproblems? Hierzu müssen wir uns nochmals die Gewichte der Nahrungsmittel in Erinnerung rufen. Die Gewichte der Nahrungsmittel sind 3, 5, 8, 10 und 11. Packt man insbesondere die zwei leichtesten Nahrungsmittel ein, so passt in den Rucksack mit einer Kapazität von 15 kein weiteres Nahrungsmittel. Das bedeutet, dass wir insgesamt maximal zwei Nahrungsmittel in unseren Rucksack packen können. Diese Bedingung ist durch die Ungleichung $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \le 2$ *mathematisch kodiert. In ähnlicher Weise leitet man die beiden anderen Ungleichungen ab. Die Nahrungsmittel mit den Nummern 3, 4 und 5 haben Gewichte von 8, 10 und 11 Einheiten. Bei einer Kapazität von 15 Einheiten können wir also maximal eines der Nahrungsmittel 3, 4 oder 5 einpacken. Dies ergibt die Ungleichung* $x_3+x_4+x_5 \le 1$*. Schließlich erkennt man, dass die Nahrungsmittel 2 und 5 zusammen ein Gewicht von 16 Einheiten ergeben. Dies übersteigt die Kapazität des Rucksacks, weswegen in den Rucksack höchstens eines der Nahrungsmittel 2 und 5 gepackt werden darf. Diese Erkenntnis führt zur dritten Ungleichung.*

Die algorithmische Umsetzung der Polyedertheorie erfolgt in so genannten Schnittebenenverfahren. Diese können, stark vereinfacht, als ein iterativer Prozess beschrieben werden, in dem lineare Modelle gelöst und um verletzte gültige Ungleichungen erweitert werden. Dieser Prozess wird iteriert, bis eine Optimallösung gefunden wird, eine Güte der besten zulässigen Lösung garantiert oder keine verletzte Ungleichung mehr gefunden werden kann, siehe linkes Bild in Abbildung 1. Ein zentraler Teil des Algorithmus ist die effiziente Identifikation von verletzten gültigen Ungleichungen (Separierungsproblem). Als ein Resultat solcher Methoden ergeben sich Antworten auf die Fragen (1) und (2) für allgemeine diskrete Modelle.

Zur umfassenden Beantwortung der Frage (3) bedarf es weiterer mathematischer Theorien. In einem gewissen Gegensatz zu Schnittebenenverfahren und Methoden der polyedrischen Kombinatorik steht der klassische „primale Ansatz“, welcher, ausgehend von einer zulässigen Lösung eines diskreten Optimierungsproblems, versucht, diese Lösung iterativ zu verbessern, siehe rechtes Bild in Abbildung 1.

Fortsetzung des Beispiels: *In unserem Zahlenbeispiel haben wir gegenwärtig eine Lösung mit einem Nährwert von 10 Einheiten. Diese Lösung besteht darin, die Nahrungsmittel mit den Nummern 1 und 2 in den Rucksack zu packen. Eine Möglichkeit, diese Lösung zu verbessern besteht in dem Tausch von Nahrungsmittel 1 mit Nahrungsmittel 4. Dieser Tausch definiert eine neue Lösung, welche besagt, Nahrungsmittel 2 und Nahrungsmittel 4 in den Rucksack zu packen. Das Gewicht dieser Lösung entspricht 15 Einheiten, ihr Nährwert beläuft sich auf 14 Einheiten. Wie kann man nun erkennen, ob diese neue Lösung optimal ist? Hierzu benutzen wir die zuvor abgeleiteten Ungleichungen,*

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \le 2$$
$$x_2 \qquad +x_5 \le 1$$
$$x_3+x_4+x_5 \le 1.$$

Multiplizieren wir die erste Ungleichung mit 4, die zweite mit 2 und die dritte mit 3 und addieren diese so erhalten wir

$$4x_1+6x_2+7x_3+7x_4+9x_5 \le 13$$

Addiert man hierzu die Ungleichung $x_4 \le 1$ *so bekommen wir die Abschätzung*

$$4x_1+6x_2+7x_3+8x_4+9x_5 \le 14$$

welche alle ganzzahligen Lösungen des Rucksackproblems erfüllen. Die Koeffizienten in der letzten Ungleichung entsprechen genau den Nährwerten der entsprechenden Nahrungsmittel. Insofern erlaubt uns diese Ungleichung festzustellen, dass jede Lösung des ursprünglichen Rucksackproblems einen Nährwert von höchstens 14 Einheiten liefert. Unsere gegenwärtig beste Lösung erreicht in der Tat genau diesen Wert. Somit ist der Beweis erbracht, dass unsere gegenwärtige Lösung optimal ist.

Unsere in dem Beispiel skizzierte Vorgehensweise liefert ein Indiz, dass eine Kombination von

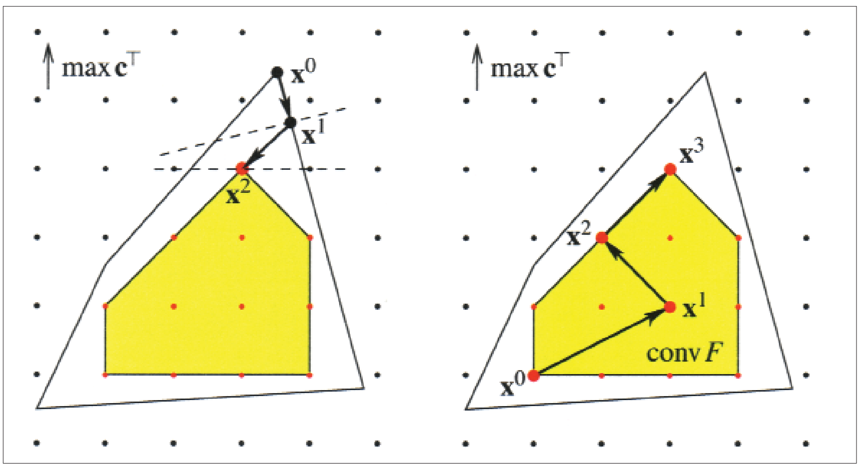

Abbildung 1
Primale und duale Methoden der diskreten Optimierung.

Methoden der polyedrischen Kombinatorik und Strategien des iterativen Verbesserns effizient zur Lösung diskreter Modelle eingesetzt werden kann. Das Problem des iterativen Verbesserns von Lösungen kann geometrisch auf die Berechnung kurzer Basen eines Gitters oder die Konstruktion eines Erzeugendensystems (Hilbert-Basis) für die ganzzahligen Punkte in einem Kegel reduziert werden. Zur Lösung solcher Problemstellungen gibt es einerseits Gitterreduktionsmethoden, andererseits algebraische und kombinatorische Verfahren, die ganzzahlige Erzeugendensysteme berechnen. Unter einem ganzzahligen Erzeugendensystem für eine gegebene Menge ganzzahliger Punkte versteht man eine bestimmte Teilmenge mit der Eigenschaft, dass jeder ganzzahlige Punkt in der ursprünglichen Menge als nicht-negative ganzzahlige Kombination der Elemente der Teilmenge repräsentiert werden kann, siehe Abbildung 2.

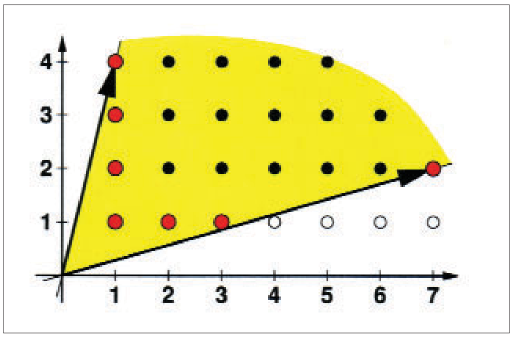

Abbildung 2
Die rot markierten Punkte definieren ein ganzzahliges Erzeugendensystem für die ganzzahligen Punkte im gelb gekennzeichneten Kegel.

Ganzzahlige Erzeugendensysteme spielen auch eine wichtige Rolle in anderen Gebieten der Mathematik, wie etwa in Teilgebieten der algebraischen Geometrie, der Kombinatorik und der Konvexgeometrie. Mathematisch aufregend und algorithmisch überraschend sind Strukturaussagen zu ganzzahligen Erzeugendensystemen, welche zu einem von meiner Arbeitsgruppe entwickelten neuen Verfahren führen. Hierbei werden im Gegensatz zu Schnittebenenverfahren iterativ Spalten der Ausgangsmatrix durch neue Vektoren ersetzt. Diese neuen Spalten definieren ein ganzzahliges Erzeugendensystem für ein Polyeder. Die rechentechnische Umsetzung dieser Methode zeigt enormes Potential. In zahlreichen internationalen Kooperationen arbeiten wir gegenwärtig an der weiteren Erforschung der Theorie der Methode und zugleich ihrer algorithmischen Umsetzung. Ich bin davon überzeugt, dass in wenigen Jahren dieses neue Verfahren als neuer integrativer Bestandteil der herkömmlichen Methoden wissenschaftlich genutzt werden kann.

Prof. Dr. rer. nat. Robert Weismantel,
geboren 1965 in München; Studium der Wirtschaftsmathematik an der Universität Augsburg. 1992 Promotion zum Dr. rer. nat. an der Technischen Universität Berlin. Für seine herausragende Dissertation erhielt er am 2. Juni 1993 den Carl-Ramsauer-Preis. 1995 Habilitation für das Fach Mathematik an der Technischen Universität Berlin. Im gleichen Jahr wurde er stellvertretender Leiter der Abteilung Optimierung des Konrad-Zuse-Zentrums für Informationstechnik Berlin (ZIB). 1997 wurde er mit dem Förderpreis im Gerhard Hess-Programm der Deutschen Forschungsgemeinschaft ausgezeichnet und im gleichen Jahr erhielt er die Rufe auf die C4-Professur am Institut für Mathematische Optimierung der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg und der Universität Trier. Dem Ruf an die Universität Trier folgte er nicht. Er ist Associate Editor von *Management Science*, Book review Editor der Zeitschrift *OPTIMA* der Mathematical Programming Society und Mitherausgeber von *Mathematical Methods of Operations Research*. In zahlreichen internationalen Kooperationen beschäftigt sich Professor Weismantel mit theoretischen und algorithmischen Fragestellungen aus Bereichen der diskreten Mathematik und deren Anwendungen. Als Gastprofessor verbrachte er einige Monate am IASI, Rom; CORE, Louvain-la-Neuve, Belgien und MIT, Cambridge, USA. Robert Weismantel ist Sprecher der Forschergruppe 468 mit dem Titel „Methods from Discrete Mathematics for the Synthesis and Control of Chemical Processes“.