# PREISWERTE MATHEMATIK

*Hans-Christoph Grunau*

*1901 war ein großes Jahr für die Naturwissenschaften: Gestiftet von dem schwedischen Chemiker und Industriellen Alfred Nobel wurden fünf Jahre nach dessen Tod zum ersten Mal die Nobelpreise für Physik, Chemie und Medizin vergeben. In gleicher Weise werden auch besondere Verdienste in der Literatur, den Wirtschaftswissenschaften oder um den Weltfrieden gewürdigt. Einen Nobelpreis für Mathematik, den gibt es allerdings nicht! Unter der Tatsache, dass ihre Wissenschaft mit dem Nobelpreis bestenfalls mittelbar durch ihre Einwirkung auf Nachbardisziplinen gewürdigt wird, haben die Mathematiker im letzten Jahrhundert ganz erheblich gelitten. Gewährleistet das Preisgeld von derzeit 10 000 000 schwedischen Kronen (www.nobel.se) dem Preisträger über Jahre hinweg unvergleichlich gute Forschungsbedingungen, so liegt aber die eigentliche Bedeutung der Preise in der Popularisierung der gewürdigten Wissenschaftler und vor allem ihrer Disziplinen. Zumindest einmal im Jahr ein Zwei-Minuten-Beitrag in der Tagesschau, ganze Seiten im Wissenschaftsteil der großen Zeitungen: Welch eine Gelegenheit, allen Mitbürgerinnen und Mitbürgern die Schönheit und die Wichtigkeit der eigenen Wissenschaft vor Augen zu führen. Und alles das blieb der Mathematik bislang verwehrt. Warum?*

### KEIN NOBELPREIS FÜR MATHEMATIK

Oft hört man das Gerücht, Alfred Nobel habe deswegen keinen Preis für Mathematik gestiftet, weil seine Frau eine Affäre mit dem bedeutenden und am Ende des 19. Jahrhunderts in Schweden sehr einflussreichen Mathematiker Gösta Mittag-Leffler gehabt habe. Das ist schon allein deswegen ganz sicher falsch, weil Alfred Nobel nie verheiratet gewesen ist. Richtig ist aber wohl dagegen, dass Nobel und Mittag-Leffler eine aufrichtige Feindschaft und Eifersucht in wissenschaftspolitischen Fragen mit einander verbunden hat.

Mittag-Leffler dagegen in Freundschaft verbunden war der kanadische Mathematiker John Charles Fields (1863–1932), der ein verglichen mit Alfred Nobel kleines Vermögen gestiftet hat, aus dem alle vier Jahre die Fields-Medaille verliehen wird. Innerhalb der Mathematik hat diese Medaille sicher ein ähnliches Ansehen wie der Nobelpreis in Physik und Chemie, aber neben der Preissumme von 9 500 US-Dollar ist auch die Außenwirkung unvergleichlich geringer.

Seit einigen Jahren ist aber eine Änderung dieser aus mathematischer Sicht bedauerlichen Zustände in Sicht. Zum einen wurden am 24. Juni 2000 in Paris sieben Preise in Höhe von je einer Million US-Dollar ausgelobt, die bei der Lösung je eines der von einer hochkarätigen Jury ausgewählten Milleniumsprobleme vergeben werden. Zum anderen hat die norwegische Regierung im August 2001 beschlossen, einen in finanzieller Ausstattung und Vergabemodus dem Nobelpreis vergleichbaren „Abel-Preis“ für Mathematik zu stiften (www.math.uio.no/abel/english/). Dieser Preis ist nach einem der bedeutendsten Mathematiker überhaupt, dem Norweger Niels Hendrik Abel (1802-1829) benannt. Vom Verleger des Buches „Onkel Petros und die Goldbachsche Vermutung“ von Apostolos Doxiadis wurde ein Preis zur Lösung eben dieser Vermutung (jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist Summe zweier Primzahlen) ausgelobt, und 1999 wurde das „Eternity Puzzle“, verbunden mit einem Preisgeld von einer Million Britische Pfund, von zwei Mathematikern mit Computerhilfe geknackt. (siehe www.eternity-puzzle.co.uk/).

Im Mittelpunkt dieses Beitrags sollen aber nun die vorher genannten sieben Milleniums-Millionen-Preise stehen und etwas ausführlicher beschrieben werden.

### SIEBEN MILLIONEN-PREISE FÜR MATHEMATIK

Landon T. Clay, ein Geschäftsmann und Multimillionär aus Boston, hat einige Millionen Dollar gestiftet und damit das Clay Mathematics Institute (CMI) gegründet (www.claymath.org/). Im Leitbild des Instituts lesen wir zu Clays Beweggründen, wie Mathematiker kaum zu formulieren gewagt hätten: Mathematik umfasse die Quintessenz menschlichen Wissens; Mathematik beeinflusse alle Bereiche menschlichen Strebens; die Entwicklung der Mathematik heute sei zentral für die Welt von Morgen. Aus diesen sehr hohen und vielleicht etwas pathetischen Ansprüchen heraus ergibt sich die Aufgabe des Institutes: Die Entwicklung und Verbreitung der Mathematik zu fördern und richtungsweisende Impulse für die Forschung des neuen Jahrhunderts zu geben! Die wohl spektakulärste Maßnahme: Die Stiftung von sieben Preisen, die jeweils mit einer Million US-Dollar dotiert sind. Ein hochkarätiger international besetzter wissenschaftlicher Beirat hat sieben Probleme aus der mathematischen Grundlagenforschung ausgewählt,

- die sich seit langem (teilweise weit über 100 Jahre) einer Lösung widersetzen und
- von deren Behandlung man sich nachhaltige und fruchtbare Impulse für die gesamte Mathematik erhofft.

Symbolträchtig hat man diese Preise am 24. Juni 2000 im Collège de France ausgelobt. 100 Jahre zuvor hatte dort David Hilbert auf dem ICM (International Congress of Mathematicians, auf dem übrigens seit 1936 alle vier Jahre die eingangs erwähnte Fields-Medaille verliehen wird) 23 für das anbrechende 20. Jahrhundert wegweisende mathematische Fragen zusammengestellt. Diese zumindest unter Mathematikern enorme Popularisierung ausgewählter Probleme durch den damals vermutlich bedeutendsten Mathematiker hat zu einem großen Schub an neuen Entwicklungen geführt, selbst wenn die aufgeworfenen Fragen nicht oder zumindest nicht im ursprünglichen Sinne oder der erhofften Allgemeinheit beantwortet werden konnten. Eine ähnliche oder noch stärkere Wirkung erhofft sich das Clay Institute nun von den kürzlich ausgeschriebenen Preisen, zumal die Aufgabenstellungen nicht nur mit dem Ansehen und der Autorität der Spitzen-Mathematiker des wissenschaftlichen Beirats verknüpft werden, sondern ein Preisgeld in einer Höhe lockt, die den Vergleich mit dem Nobelpreis nicht mehr scheuen muss.

### Die Preisfragen

Für die vollständige oder doch zumindest weitgehende Behandlung der folgenden mathematischen Problemkreise kann man jeweils einen Preis erringen:

- ***Birch und Swinnerton-Dyer-Vermutung.*** Dieses Problem ist im Bereich zwischen Zahlentheorie und algebraischer Geometrie angesiedelt. Es geht darum, rationale Lösungen von Polynomen in mehreren Veränderlichen mit rationalen Koeffizienten zu studieren. Vermutet wird, dass die Menge der rationalen Lösungen genau dann unendlich ist, wenn eine dem Problem zugeordnete ”ζ-Funktion“ im Punkte 1 den Wert 0 hat.
- ***Yang-Mills-Theorien.*** Diese Preisfrage ist im Grenzbereich zwischen theoretischer Elementarteilchenphysik und Mathematik angesiedelt. Das Ziel besteht darin, eine mathematisch fundierte Theorie zu entwickeln, die die grundlegenden (starken und schwachen) Wechselwirkungen zwischen den Atombausteinen beschreibt und erklärt.
- ***Hodge-Vermutung.*** Ein Problem aus der algebraischen Geometrie, speziell der Klassifikationstheorie projektiver algebraischer Varietäten.
- ***Die Riemannsche Vermutung.*** Es gibt kaum etwas, das scheinbar so zufällig verteilt ist wie Primzahlen. Und dennoch herrscht eine mysteriöse Ordnung in diesem scheinbaren Durcheinander: Die relative Häufigkeit von Primzahlen in sehr großen Zahlbereichen kann man recht genau angeben. Eine zentrale Rolle kommt dabei der so genannten Riemannschen-ζ-Funktion zu. Die Riemannsche Vermutung betrifft die Lage der Nullstellen dieser Funktion; trifft diese zu, könnte man viele Fragen aus dem Bereich der Primzahlverteilung mit einer unvergleichlich größeren Genauigkeit als bisher beantworten.
- ***P = NP?*** Hier geht es um die Komplexität algorithmisch (auf Computern) lösbarer Probleme. Ganz grob gesprochen sind „P“-Probleme leicht zu lösen, während man bei „NP“-Problemen lediglich (?) leicht entscheiden kann, ob ein vorgelegter Lösungsvorschlag das Problem tatsächlich löst. Die 1971 von Stephen Cook und Leonid Levin aufgeworfene und zu untersuchende Frage lautet, ob alle „NP“-Probleme auch schon „P“-Probleme sind; die vermutete Antwort lautet „nein“.
- ***Die Poincaré-Vermutung.*** Eine Frage aus der „Topologie“, jener mathematischen Disziplin, in der diejenigen geometrischen Eigenschaften von Objekten untersucht werden, die sich bei stetigen Deformationen nicht ändern. Vermutet wird, dass eine bestimmte topologische Eigenschaft (der „einfache Zusammenhang“) schon den topologischen Typ (d. h. die geometrische Gestalt bis auf „reversible“ Deformationen) von geschlossenen (d. h. unberandeten) $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten (das sind Verallgemeinerungen von Flächen) festlegt.
- ***Die Navier-Stokes-Gleichungen.*** Hier geht es wieder um die mathematisch fundierte Behandlung eines Modells aus der klassischen mathematischen Physik. Obwohl dieses Modell bereits im 19. Jahrhundert zur Beschreibung der Strömung zäher Flüssigkeiten (z. B. Wasser) formuliert wurde und man in der Tat schon viel Mathematik hierzu entwickelt hat, bleiben (die?) fundamentale(n) Fragen aus mathematischer Sicht immer noch ungelöst. Auch für die Physiker ist diese Situation sehr beunruhigend, denn damit bleibt auch die Frage offen, ob dieses Modell wirklich „richtig“ in dem Sinne ist, dass es alle auf den zu beobachtenden Längen- und Zeitskalen relevanten Phänomene wiedergibt.

Die Regeln zur Erlangung eines dieser Preise sind außerordentlich streng: Grundbedingung ist, dass die Lösungsvorschläge des jeweiligen Problems umfassend sind und in einem international renommierten und referierten Fachjournal veröffentlicht wurden. Danach müssen die Kandidaten zwei Jahre abwarten und ihren (neidischen?) Kollegen Gelegenheit geben, ihre Arbeiten auf Herz und Nieren zu prüfen. Sollte sich in dieser Zeit kein ernsthafter Einwand ergeben und die Lösung vor den Fachkollegen Bestand haben, so kann schließlich der wissenschaftliche Beirat des Clay Mathematics Institute das Preisverleihungsverfahren initiieren. Dabei wird insbesondere auch geprüft, ob bei der Lösung auf wesentliche Beiträge von Kollegen zurückgegriffen wurde; in diesem Fall wird der Preis in angemessener Weise geteilt.

Wie das Clay Institute ganz selbstbewusst formuliert, ist der Weg das Ziel. Es ist beabsichtigt, neue Entwicklungen in der Mathematik anzustoßen: Mit den vertrauten Techniken wird keines der Probleme zu lösen sein, denn dazu bestand ja seit Jahrzehnten Gelegenheit ...

Um die Probleme, ihre Wechselwirkungen mit anderen Disziplinen und die Anstöße zu neuen und weitertragenden mathematischen Konzepten geht es also viel mehr noch als um die Verifikation eines vermuteten mathematischen Lehrsatzes. Im Folgenden sollen vier der Preisprobleme etwas genauer beschrieben werden, für die übrigen drei Probleme und Hintergrundinformationen sei auf die Homepage www.claymath.org verwiesen.

Es ist auffallend, dass sämtliche Preisprobleme der mathematischen Grundlagenforschung zuzurechnen sind, selbst wenn sie der so genannten angewandten Mathematik entstammen. Ausgerechnet ein Geschäftsmann stiftet seine Millionen für Entwicklungen, die sich nicht in unmittelbar abzusehender Zeit in Patenten und eingeworbenen Industriegeldern niederschlagen werden; vermutlich weil er sich von grundlegenden Untersuchungen langfristig mindestens ebensoviel verspricht.

### DIE RIEMANNSCHE VERMUTUNG

Die Geheimnisse der Primzahlen sind in einer einzigen Funktion verborgen? Sogar nur in der Lage derer Nullstellen? Zumindest zum Teil sieht es ganz danach aus.

Primzahlen sind diejenigen natürlichen Zahlen, die genau zwei verschiedene Teiler haben: 1 und sich selbst. Also:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... , 101, 103, 107, 109,
113, 127, 131, ..., 3229, 3251, 3253, 3257, 3259, 3271, ...

Schon in diesem relativ kleinen Zahlbereich werden große Unregelmäßigkeiten deutlich: Nach 21 Nicht-Primzahlen folgt eine Dekade mit der größtmöglichen Anzahl von Primzahlen! Es scheint vollkommenes Chaos zu herrschen.

Tatsächlich herrscht jedoch eine höhere, geradezu mysteriöse Ordnung. Wir bezeichnen, wie üblich, mit $\pi(n)$ die Anzahl der bis zu der natürlichen Zahl $n$ aufgetretenen Primzahlen:
$\pi(2) = 1$,
$\pi(12) = 5$,
$\pi(19) = 8$,
$\pi(20\,000\,000) = 1\,270\,608$, ...
Schon Carl Friedrich Gauß hat rein empirisch (!!) gefunden, dass sich diese Funktion asymptotisch (d. h. für riesige $n$ ähnlich) wie $n/\log(n)$ oder etwas genauer wie

$$\mathrm{Li}(n) = \int_0^n \frac{1}{\log t}\,dt$$

verhält; log ist der natürliche Logarithmus. Bernhard Riemann (1826-1866) hat die Verbindung mit der nach ihm benannten ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und ihrer meromorphen Fortsetzung nach
$\mathbb{C} \setminus \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 1\}$
hergestellt: Das von Gauß beobachtete Verteilungsgesetz lässt sich mathematisch rigoros beweisen, wenn man zeigen kann, dass diese ζ-Funktion in der komplexen Halbebene derjenigen Zahlen, deren Realteil größer oder gleich 1 ist, keine Nullstellen hat. Dieser Beweis gelang 1899 de la Vallée-Poussin und Hadamard. Was gibt es also noch zu tun?

Es scheint so, dass die empirisch beobachtete Ordnung (und hier leisten moderne Hochleistungsrechner unschätzbare Zuarbeit) sich wesentlich genauer als nur durch die Funktion $\mathrm{Li}(n)$ beschreiben ließe. Die Riemannsche Vermutung besagt, dass alle Nullstellen der ζ-Funktion auf der Geraden
$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = 1/2\}$
liegen. (Abbildungen 1 und 2)

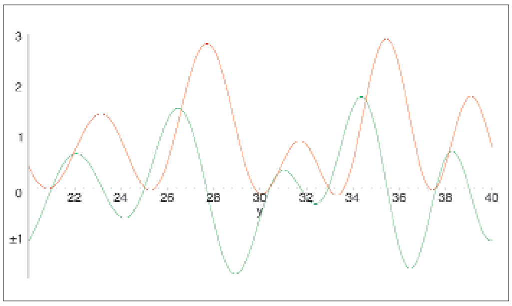


*Abbildung 1*
*Die Graphen stellen den Real- und den Imaginärteil der ζ-Funktion auf der Geraden Re (z) = 1/2 dar: Gemeinsame Nullstellen beider Graphen sind Nullstellen der ζ-Funktion*

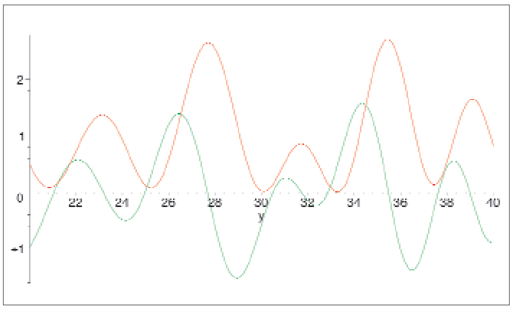


*Abbildung 2*
*Die Graphen stellen den Real- und den Imaginärteil der ζ-Funktion auf der Geraden Re (z) = 0,6 dar: Scheinbar hat die ζ-Funktion hier keine Nullstellen*

Könnte man diese Vermutung beweisen, erhielte man daraus direkt eine Fehlerschranke für die Approximation der Primzahlverteilungsfunktion:
$|\pi(n) - \mathrm{Li}(n)| \leq C\sqrt{n}\,\log n$.
mit einer geeigneten Konstante $C$. Die Gültigkeit dieser Fehlerschranke ist sogar gleichwertig mit der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung. Letzteres hätte nicht nur für die Primzahlverteilung, sondern für die analytische und algebraische Zahlentheorie insgesamt enorme Konsequenzen.

### P VERSUS NP

Entscheidendes Merkmal für die Komplexität eines Algorithmus ist dessen Laufzeit (d. h. Anzahl der durchzuführenden Schritte bis zu einer Lösung des Problems) in Abhängigkeit von der Größe der insgesamt zu verarbeitenden Datenmenge. Bei jeweils vergleichbaren Einzeldaten kann man dabei etwa an deren Anzahl denken. Ein Problem heißt vom Typ „P" (polynomial), wenn man wenigstens *einen* Algorithmus zur Lösung dieses Problems angeben kann, dessen Laufzeit $t$ „polynomial" von der Größe der Daten

*Abbildung 3*
*Ein Haufen ungeordneter Puzzleteile*


*Abbildung 4*
*Das fertig zusammengesetzte Puzzle*

$D$ abhängt, wenn also ein Exponent $n$ und eine Konstante $C$ existieren, so dass
$t \leq C \cdot D^n$
gilt. Auf den Web-Seiten des Clay Instituts findet man das Beispiel eines Puzzlespiels. Das Problem „Man lege die Teile auf den Tisch" ist ohne Frage vom Typ „P", denn dessen Lösung erfordert genau soviele Schritte wie Puzzleteile, so dass man die Laufzeitabschätzung mit $n = 1$ erhält. (Abbildung 3)

Sicher (oder nur scheinbar?) schwerer ist es, die Puzzleteile in der richtigen Anordnung auf den Tisch zu legen. Die Entscheidung aber, ob ein Lösungsversuch erfolgreich ist, lässt sich ebenso schnell wie das Auspacken des Puzzles erledigen: Man muss nur jedes Teil ansehen und prüfen, ob es auf zulässige Weise mit seinen (maximal 4) Nachbarn verbunden ist. (Abbildung 4)

Das Puzzlespiel korrekt zu legen ist also vom Typ „NP" (nichtdeterministisch polynomial) in dem folgenden stark verkürzten, aber für unsere Zwecke ausreichend genauen Sinne:

Ein Problem ist vom Typ „NP", wenn sich die Entscheidung, ob ein Lösungsvorschlag das Problem in der Tat löst, in polynomialer Laufzeit treffen lässt.

Will man nun ein Puzzle korrekt legen, und nehmen wir der Übersichtlichkeit halber an, dass eine weiße Fläche gepuzzelt werden muss, so wird man sich ein Startteil herausgreifen, alle anderen Teile der Reihe nach durchprobieren, ob sie angelegt werden können und mit den bereits gelegten Teilen immer wieder so verfahren. Hat man $D$ Puzzleteile, so wird man in der Größenordnung $D!$ und damit in etwa $D^D$ Schritte bis zur Lösung des Puzzles benötigen. Ganz klar also: Das Puzzle ist vom Typ „NP" und gleichzeitig nicht vom Typ „P", denn die Laufzeit ist doch $D^D$ und für jede feste Zahl $n$ und jede noch so groß gewählte Konstante $C$ ist $D^D \geq C \cdot D^n$ für große D!!!? Wo liegt also das Problem?

Das Problem liegt darin, dass man nicht *beweisen* kann, dass *jeder mögliche* Algorithmus zum Legen des Puzzles eine nicht polynomiale Laufzeit hat. Und da hilft es gar nichts, dass alle *bekannten* Algorithmen sich so verhalten. Man muss durch rein logisches Argumentieren die Existenz eines Algorithmus mit polynomialer Laufzeit *ausschließen*. Und das ist weder für das Puzzlespiel noch für irgendein anderes Problem vom Typ „NP" bisher gelungen.

Der Preis wird verliehen, wenn man entweder die Hypothese „P = NP" beweist oder ein Problem aus der Klasse „NP" angibt, das nicht zu „P" gehört.

## DIE POINCARÉ VERMUTUNG

Die Wichtigkeit topologischer Begriffe ist jedem klar, der z. B. sein Fahrrad an einem Hindernis anketten möchte: Man muss sich die Frage stellen, ob allein durch stetige Deformation die Kette von dem Hindernis oder von dem Fahrrad entfernt werden kann oder ob dieses ohne unstetige Deformationen der Kette (Aufbrechen!!) nicht gelingen wird.

Von einer ähnlichen Kategorie ist der Begriff des einfachen Zusammenhangs. Man stelle sich eine geschlossene Fläche vor, wie z. B. die Oberfläche eines Balles oder eines Fahrradschlauchs. Weiter stelle man sich vor, dass man auf beliebige Weise ein Gummiband auf diese Oberfläche bringt. Egal, wie man dieses anstellt, kann man das Band bei der Oberfläche des Balles (Abbildung 5) stets auf einen Punkt zusammenknäulen, ohne das Gummi zu zerschneiden, während das bei dem Fahrradschlauch (Abbildung 6) mitunter nicht geht (man knote ein Band um dessen Querschnitt). Die Oberfläche des Balles ist „einfach zusammenhängend", die des Fahrradschlauches nicht. Poincaré wusste bereits vor gut 100 Jahren, dass jede einfach zusammenhängende geschlossene (randlose zweidimensionale) Fläche stetig (ohne zu zerreißen) und bijektiv (reversibel) in die Oberfläche eines Balles deformiert werden kann: D. h. bei dieser handelt es sich im Wesentlichen um das *einzige* Beispiel geschlossener einfach zusammenhängender Flächen.

Poincaré hat vermutet, dass eine solche Aussage für höherdimensionale, mindestens aber drei-dimensionale, Objekte ebenfalls richtig ist. Um den Beweis oder die Widerlegung dieser Vermutung geht es bei diesem Preisproblem. Besonders pikant wird diese Frage vor allem dadurch, dass man bei verwandten topologischen Fragen in höheren Raumdimensionen schon so manche Überraschung erlebt hat. Es scheint, dass die Unterschiede zwischen zwei- und dreidimensionaler Geometrie größer sind als man sich das gegenüber seiner Anschauung vielleicht zugestehen möchte.

## Die Navier-Stokes-Gleichungen

Hier handelt es sich um ein System von Differentialgleichungen, das die Strömung zäher inkompressibler Flüssigkeiten modelliert. Aus physikalischer Sicht ist das Modell nicht besonders subtil; neben der mathematischen Formulierung der Inkompressibilität handelt es sich nur um das physikalische Grundgesetz „Die Kraft ist proportional zur Beschleunigung bzw. Verzögerung“. Hierbei ist dann lediglich noch der Term für die inneren Reibungskräfte zu modellieren. Obwohl im Reibungsterm lineare Näherungen vorgenommen werden und der einzige nichtlineare Term der konvektive Anteil der Beschleunigung ist, sind die Navier-Stokes-Gleichungen aus mathematischer Sicht erst zu einem (vermutlich kleinen) Teil verstanden worden. Die Existenz von klassischen Lösungen, die also im vertrauten Sinn differenzierbar sind und die Navier-Stokes-Gleichungen erfüllen, ist bis heute im Allgemeinen noch offen. Die Mathematiker haben auf diesen Missstand sehr flexibel reagiert: Jean Leray, einer der bedeutendsten Mathematiker des frühen 20. Jahrhunderts, hat ganz wesentlich den Begriff der „schwachen“ Lösung mitgeprägt; diese erfüllen die Gleichungen in einem verallgemeinerten, einem „gemittelten“ Sinne, und auch die Differenzierbarkeit wird auf andere und weitertragende Beine gestellt. Und in diesem Sinne gelingt dann auch in der Tat die Konstruktion von „globalen“ Lösungen, die also für alle Zeiten existieren, wobei aber durchaus für sehr kurze Momente unendliche Beträge der Geschwindigkeit nicht grundsätzlich ausgeschlossen werden können. Aber von diesen schwachen Lösungen ist derzeit weder die Eindeutigkeit bekannt noch, ob es sich nicht letztlich um klassische (glatte, „reguläre“) Lösungen handelt. So hat man also erfolgreich ein kompliziertes Problem (Existenz globaler klassischer Lösungen) durch ein anderes kompliziertes Problem (Eindeutigkeit und Regularität der schwachen Lösung) ersetzt. Beide Probleme scheinen gleichermaßen schwierig zu sein und stehen seit der fundamentalen Arbeit von Jean Leray aus dem Jahre 1934 im Raum; für jedes winkt bei Lösung das Preisgeld von einer Million US-Dollar. Man mag einwenden, dass natürlich das Modell eine Lösung hat, weil es die Natur beschreibt. Genau das Letztere aber ist nicht wirklich klar, und um diese Frage zu bejahen oder deren Bejahung zumindest für sinnvoll und konsistent zu halten, muss das Modell sich bewähren. Ist das Modell gut und enthält alle relevanten Informationen, so muss es möglich sein, eben diese Informationen allein durch logisches Schließen (Methoden der angewandten Mathematik und theoretischen Physik) aus dem Modell wieder herauszuholen. Und der erste Schritt in dieser Richtung wäre ein umfassender Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Auf Grund der relativen Einfachheit der Herleitung des Modells sind Zweifel daran durchaus legitim, dass die Navier-Stokes-Gleichungen Strömungen in allen Geschwindigkeitsbereichen vom ruhigen trägen

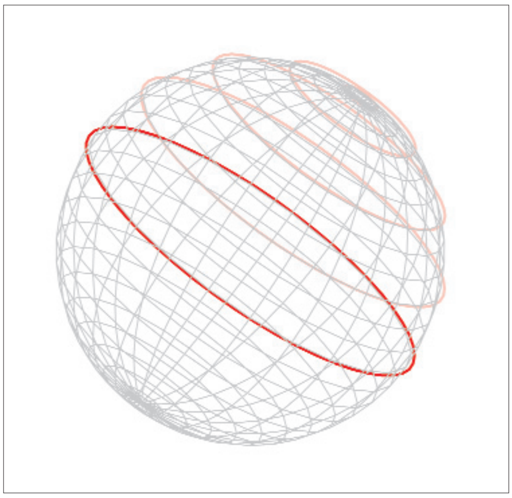

*Abbildung 5*
*Ein Gummiband auf der Oberfläche eines Balles kann stets auf einen Punkt zusammengeknäult werden, ohne das Gummi zu zerschneiden.*

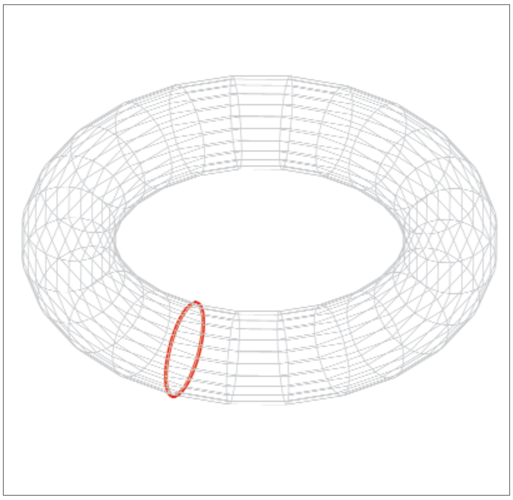

*Abbildung 6*
*Ein Gummiband auf der Oberfläche eines Fahrradschlauchs (um den Querschnitt geknotet) kann nicht immer zu einem Punkt zusammengeknäult werden.*

**Literatur**

Neben mathematischem Allgemeinwissen und selbst erfragter und zusammengetragener Information beruht der Beitrag vor allem auf den folgenden Quellen:

Clay Mathematics Institute, Millenium Prize Problems, Website: http://www.claymath.org/Millennium Prize Problems/ sowie die Beschreibungen der einzelnen Preisprobleme

Allyn Jackson, Norway establishes Abel prize in mathematics, Notices Amer. Math. Soc. 49 (2002), 39-40.

Carl Riehm, The early history of the Fields medal, Notices Amer. Math. Soc. 49 (2002), 778-782.

*Abbildung 7*
*Die ruhig und träge dahingleitende Elbe*

*Abbildung 8*
*Bildung von Strudeln hinter Brückenpfeilern*

*Abbildung 9*
*Turbulent herabstürzendes Wasser am Rheinfall*

Dahingleiten der Elbe bei Magdeburg (Abbildung 7) über die Bildung von Strudeln, z. B. hinter Brückenpfeilern (Abbildung 8), bis hin zum vollkommen turbulenten Herabstürzen des Wassers am Rheinfall (Abbildung 9) korrekt beschreiben.

Die Navier-Stokes-Gleichungen stehen auf dem Prüfstand; und Modellverifikation ist also eine Haupttriebfeder, sich mit diesen zu beschäftigen. Eine andere ist wissenschaftliche Neugierde und die Hoffnung, durch den Zwang, nicht alleine auf etablierte Methoden bauen zu können, auf neue und weitertragende analytische Konzepte und Werkzeuge zu stoßen. Gerade in letzterer Hinsicht hat sich der Einsatz bisher schon reichlich gelohnt: Der moderne, oben angesprochene Lösungsbegriff ist inzwischen fundamental in der gesamten Analysis und hat wirklich grundlegende Lösungen bei anderen Problemen überhaupt erst ermöglicht. Die Weiterentwicklung der Analysis in dieser Richtung anzustoßen, ist sicher der eigentliche Beweggrund des wissenschaftlichen Beirats, einen Eine-Million-US-Dollar-Preis für die grundlegende Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen auszuschreiben.

### AKTUELLE DURCHBRÜCHE

Angeheizt durch das Preisgeld und mehr noch durch das hohe Prestige kamen immer wieder Gerüchte und Ankündigungen auf, eines der Preisprobleme sei gelöst oder es sei zumindest ein grundlegender Durchbruch erzielt worden. In diesem Sinne sind in letzter Zeit die Riemann- und die Poincaré-Vermutung in die mathematischen Schlagzeilen gekommen. Die vom Clay Institute geforderten zwei Jahre hatte aber noch bislang keiner dieser Lösungsvorschläge Bestand. Bisher wurden immer wieder Lücken entdeckt.

Seit gut einem Jahr aber herrscht Aufregung hinsichtlich der Poincaré-Vermutung. Der hochangesehene russische Mathematiker Grigori Perelman hat einen Lösungsvorschlag vorgelegt, und Experten schätzen diesen als sehr sorgfältig und vielversprechend ein. Es gibt wohl noch einzelne Kritikpunkte und zu klärende Fragen, aber vielleicht wird demnächst tatsächlich die erste Million fällig!?

Unabhängig davon, ob Perelman die Poincaré-Vermutung endgültig gelöst hat oder nicht, macht dieses Beipiel eindrücklich deutlich, dass das Clay Institute eines seiner wichtigsten Ziele (das wichtigste Ziel?) damit schon erreicht hat: Die genannten Probleme werden intensiv untersucht, und es entsteht eine unglaubliche Flut von Ideen, die die Mathematik bereichern und voranbringen. In Bereichen und mit Methoden – und das ist das Faszinierende an der Mathematik –, die man vorher nicht absehen kann.

**Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau**
hat Mathematik in Marburg und Göttingen studiert. Mit einem Promotionsstipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes promovierte er an der Universität Göttingen. Er war wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TU Berlin sowie wissenschaftlicher Assistent und Oberassistent an der Universität Bayreuth. 1996 erfolgte die Habilitation. An der Universität Utrecht war Professor Grunau für ein Jahr als „docent/onderzoeker" tätig. Im Oktober 2001 übernahm er die C4-Professur Analysis an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. Sein Forschungsgebiet ist die nichtlineare Analysis, insbesondere partielle Differentialgleichungen. Gegenwärtig arbeitet Professor Grunau mit internationalen Partnern u. a. an folgenden Einzelprojekten, die im Zusammenhang mit Fragen aus Differentialgeometrie und Mechanik stehen: qualitative Eigenschaften von Lösungen elliptischer Randwertprobleme höherer Ordnung, semilineare Eigenwertprobleme und parabolische Systeme mit kritischem Wachstum sowie Navier-Stokes-Gleichungen.