TECHNISCHE MECHANIK 9 (1988) Heft 4
Manuskripteingang: 25. 08. 1988

Finite-Elemente-Formulierungen ebener und axialsymmetrischer Kontaktaufgaben mit Coulombscher Reibung

Johannes Altenbach, Ryszard Buczkowski

1. Einleitung

Die Lösung von Kontaktproblemen ist seit vielen Jahren wegen der technischen Bedeutung solcher Aufgaben Gegenstand intensiver internationaler Forschung. Die Verschiedenartigkeit von Kontaktproblemen macht eine gesonderte Betrachtung folgender grundlegender Kontaktphänomene notwendig:

- Probleme des Punkt- bzw. Linienkontaktes und des Kontaktes an großen Flächen, rollender Kontakt,
- Einfluß der verschiedenen physikalischen Eigenschaften der sich in einem Kontakt befindlichen Körper (Elastizität, Viskoplastizität, Plastizität, Anisotropie der Körper usw.),
- statische und dynamische Probleme,
- Probleme der Reibung und des Verschleißes der Deckschicht,
- thermische Probleme,
- technologische Probleme verbunden mit der Metallbearbeitung der Maschinenbauteile (Oberflächenrauhigkeit, Gestaltfehler usw.),
- Gründung der Konstruktion auf der elastischen Bettung, (elastischer Halbraum, elastische Bettung von Winkler, Pasternak, Vlasov, Filonenko-Boroditsch, Hetenyi u. a.).

Die große Zahl der in wissenschaftlichen Zeitschriften und Konferenzmaterialien publizierten Artikel und die zunehmende Zahl von Monografien und Lehrbüchern, die nur der Kontaktthematik gewidmet sind (Shtaerman, 1949; Galin, 1980; Rvatchev und Procenko, 1977; Gladwell, 1980; Aleksandrov und Mhitarjan, 1983; Mossakowski u. a., 1985; Kalker, 1985; Johnson, 1985; Aleksandrov und Romalis, 1986) unterstreichen das große Interesse für die Thematik der Kontakterscheinungen.

In vielen Ländern gibt es heutzutage intensive, experimentelle und theoretische Forschungen hinsichtlich der Kontakterscheinungen. Es herrscht die allgemeine Überzeugung, daß es ohne genaue Kenntnis der in Maschinenverbindungen auftretenden Kontakterscheinungen nicht möglich ist, die Probleme zu analysieren und zu lösen, die die Genauigkeitsverbesserung bei der Montage und die Erhöhung der Zuverlässigkeit des Maschinensystems zum Ziel haben.

Das klassische Instrument für die Analyse elastischer Kontaktprobleme ist die Theorie von Hertz (1881). Die Lösungsmethoden, die auf dieser Theorie beruhen, können nur zur Berechnung gewisser Klassen einfacher Kontaktaufgaben benutzt werden. Sie ermöglichen keine vollständige Analyse des realen physikalischen Verhaltens, z. B. bei der Kontaktanalyse von Körpern, deren Oberflächen beliebig gestaltet wurden bzw. bei der Berücksichtigung nichtlinearer, physikalischer und geometrischer Eigenschaften, die an der Kontaktzone von zwei Körpern auftreten.

In der numerischen Mechanik wird in zunehmendem Maße die Methode der finiten Elemente benutzt, weil dieses Verfahren vielseitig anwendbar und gut programmierbar ist (Altenbach und Sacharov, 1982; Zienkiewicz, 1983; Bathe, 1986; Kleiber, 1985; Argyris und Mlejnek, 1986; 1987). Diese Methode wird bei der Lösung von Kontaktproblemen in verschiedenen Vorgehensweisen benutzt. Es sind lineare und nichtlineare Optimierungsverfahren (F. D. Fischer, 1974; Panagiotopoulos, 1975; U. Fischer u. a., 1987a; 1987b; Jacobi, 1983) und die Methode der Variationsgleichungen (Duvaut und Lions, 1980; Panagiotopoulos, 1977; Kravchuk, 1981; Campos u. a., 1982; Oden und Pires, 1983a, 1983b; Kikuchi, 1982; Oden und Pires, 1984; Skalski, 1986; Kuzmenko, 1987) zu nennen.

In der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie werden die Randbedingungen im allgemeinen eindeutig auf den Rändern der betrachteten Körper bestimmt. Bei Kontaktaufgaben sind die Kontaktbereiche und die Kontaktkräfte nicht von vornherein bekannt. Aus diesem Grunde haben bei der Behandlung der Kontaktprobleme Zwangsbedingungen, die meist in der Form von Ungleichungen (unilateral constraints) für die Spannungen und Verschiebungen an der Kontaktzone auftreten, wesentliche Bedeutung. Unter Berücksichtigung allgemeiner Zwangsbedingungen werden folgende drei Lösungsmethoden angewandt (Gabbert, 1983):

- Direkte Einarbeitung in das Gleichungssystem (durch Umformungen an den Zeilen und Spalten z. B. Transformation, Additionen oder Streichungen von Zeilen und Spalten der Steifigkeitsmatrixelemente, Belastungs- und Verschiebungsvektoren),
- Anwendung der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren,
- Anwendung der Straf- oder Penalty-Verfahren.

Die klassische Methode, derartige Variationsprobleme zu lösen, ist das Lagrangesche Befreiungsprinzip (Hughes u. a. 1976; Idelberger, 1984; Chaudhary und Bathe, 1986; Rothert, 1984). In Verbindung mit der Finite-Elemente-Methode führt sie jedoch zu vergrößerten Gleichungssystemen infolge der zusätzlichen Unbekannten, die sog. Lagrangeschen Multiplikatoren.

Mittels der Penalty-Methode (Schomburg, 1979; Oden, 1981; Blisse, 1985) gelingt es, die allgemeinen Zwangsbedingungen näherungsweise zu erfüllen, jedoch ist die Wahl der Penalty-Zahl problematisch. Die Beschreibung beider Methoden bei der Anwendung für die Lösung der

Kontaktaufgaben wird in der Arbeit von Oden und Kikuchi (1982) angegeben.

Im Gegensatz zu den hier beschriebenen Verfahren bietet die direkte Einarbeitung der Zwangsbedingungen den Vorteil, den Kontaktvorgang anschaulich zu erfassen. Die direkte Methode beruht auf einer inkrementellen Vorgehensweise oder auf einem einmaligen Lastschritt, auf der Ermittlung der Kontaktkräfte und einer Modifikation des gesamten Gleichungssystems gemäß den Kontaktrandbedingungen. Grundlegende Arbeiten zu dieser Vorgehensweise wurden von Chan und Tuba (1971), Francavilla und Zienkiewicz (1975) sowie Ohte (1973) geschrieben. Die von Chan und Tuba (1971), von Francavilla und Zienkiewicz (1975) sowie Ohte (1973) verwendeten Verfahren dienten in der Arbeit von Wriggers (1981) als Grundlage für die Berechnung der Kontakt- und Stoßprobleme elastischer Körper. Fredriksson (1976a, 1976b) gewinnt eine Analogie zwischen dem Fließgesetz in der Plastizitätstheorie und Gleitgesetz und erweitert das direkte Verfahren, indem er für die Reibung in der Kontaktfläche das Coulombsche Reibungsgesetz mit einer Gleitverfestigung einführt. Stadter und Weiss (1979), Mazurkiewicz und Ostachowicz (1983), (1984) bauten für die Kontaktberechnung in ein Finite-Element-Programm „gap"-Elemente ein. Die Kontaktiterationen erfolgen durch Änderung der Elastizitätsmoduli der „gap"-Elemente, was der Penalty-Methode ähnelt.

Feldmann (1981) gewinnt in Anlehnung an die Vorgehensweise von Schäfer (1975) über die Betrachtung der Dissipationsenergie von zwei aneinander reibenden Körpern ein zu den rotationssymmetrischen Ringelementen kompatibles Zwischenelement, um die Schraube-Mutter-Verbindung berechnen zu können. Desai u. a. (1985) haben sich auf die Goodmansche u. a. (1968) Idee stützend, die Steifigkeitsmatrix dieses Elementes zur Lösung eines Problems der Grundbaumechanik (Gründung des Fundamentes auf einer elastischen Unterlage) berechnet. Goodman u. a. waren die ersten, die ein spezielles Zwischenelement bei der Lösung des Kontaktproblems in der Geomechanik angewandt haben.

Eine weitere Klassifizierung der Kontaktprobleme sowohl nach der klassischen Theorie als auch nach der Variationsformulierung und eine umfangreiche Literatur zur historischen Entwicklung sind bei Kalker (1975, 1977) zu finden.

Eine Wertung der verschiedenen mathematischen Modelle bei der Lösung ebener und räumlicher Kontaktaufgaben kann man in den Arbeiten von Curnier (1984), Mc Cool (1986), Kalker (1986) oder Martins und Oden (1985) finden.

Der Stand der theoretischen Kenntnisse für die Beurteilung von Reibungs- und Verschleißprozessen ist von Bowden und Tabor (1958), Kragelski u. a. (1982) bzw. Fleischer u. a. (1980) angegeben worden.

2. Problemstellung

In den meisten Arbeiten über die Kontaktmechanik wird angenommen, daß die Mikrounebenheiten der Berührungsflächen unberücksichtigt bleiben. Man setzt voraus, daß die Wechselwirkungen nur in der normalen Richtung auftreten (es wirken keine Tangentialkräfte) bzw. man verwendet das sogenannte ideale Reibungsmodell, nach dem der Reibungskoeffizient vom Belastungs- und Gleitwert unabhängig ist.

Eine der ersten Anwendungen der FEM zur Lösung des Kontaktproblems stammt von White und Humpherson (1969). Die Autoren wandten diese Methode an, um die Spannungen in der Welle einer Schrumpfverbindung zu ermitteln. Dabei wurden die Untersuchungen alternativ mit und ohne Berücksichtigung der Reibungskräfte durchgeführt. Wilson und Parsons (1970) untersuchten drei unterschiedliche Bauarten von Spannbuchsen unter der Voraussetzung eines vollständigen Adhäsionszustandes. In den Beiträgen von Chan und Tuba (1971) und von Ohte (1973) wurde die FEM zur Lösung des zweidimensionalen Kontaktproblems eingesetzt. In beiden Arbeiten wurde ein ideales Reibungsmodell angenommen und die sogenannte „total theory" verwendet. In der Arbeit von Tsuta und Yamaji (1973) wurde die inkrementale Methode zur Lösung des ebenen Zustandes und des axialsymmetrischen Spannungszustandes (ESZ, ASZ) beschrieben. Francavilla und Zienkiewicz (1975) stellen ein Verfahren zur Lösung der ebenen Kontaktaufgaben ohne Reibung vor. Beide Körper sind linearelastisch, zwischen den Kopplungsknotenpunkten kann ein Spiel auftreten. Sachdeva und Ramakrishnan (1981) entwickeln die von Francavilla und Zienkiewicz (1975) vorgeschlagene Methode weiter und geben die Lösung des Kontaktes der elastischen Körper unter Berücksichtigung der Coulombschen Reibung an. In ihren folgenden Arbeiten (1983) geben Sachdeva und Ramakrishnan eine Methode zur Berechnung der Nachgiebigkeitsmatrix der Körper des Schwalbenschwanzmodells unter Berücksichtigung der Welligkeit der Berührungsflächen an.

Bei Gaertner (1977) findet man ein Beispiel für die Berechnung des Hertzproblems von Pleuelbolzen. Die Zusammenhänge werden in inkrementaler Form angegeben und es wurde die Gültigkeit der idealen Reibung für den ESZ und den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) vorausgesetzt. Von Witkowski (1978) stammt der Vorschlag für eine effektive und ökonomische Strategie zur Lösung der nichtlinearen diskreten Systeme. Die vorgeschlagene Methode ermöglicht den nichtlinearen Kontakt realer Systeme zu behandeln und nutzt die Vorteile der Verschiebungsgrößen-, Kraftgrößen- und Randintegrationsmethode aus. Okamoto und Nakazawa (1979) stellen einen neuen Vorschlag der Lösung nichtlinearer Kontaktprobleme aufgrund der FEM und der inkrementalen Belastungstheorie vor. Die betrachtete Aufgabe bezieht sich auf räumliche Kontaktprobleme. Häusler (1974) und Leidich (1983) stellen mit der FEM umfangreiche Ergebnisse der Berechnungen von Schrumpfverbindungen vor. Den Untersuchungen lagen rotationssymmetrische und zur Sicherung der Ergebnisse für die Biegung dreidimensionaler FE-Strukturen zugrunde.

Torstenfelt (1983, 1984) stellt das inkrementale Verfahren für die Analyse von elastischen Kontaktproblemen für ein beliebiges Belastungsprogramm vor. Der Autor berücksichtigt die sog. Werkstoffbelastungsgeschichte. Die Genauigkeit und Effektivität dieser Me-

thode wurde für den Fall der Belastung und Entlastung des elastischen Halbraumes mit Hilfe eines starren zylindrischen Stempels verifiziert. Bathe und Chaundhary (1984, 1985) geben die Lösung der ebenen und axialsymmetrischen Aufgaben mit Reibung an. Es wurde hier eine inkremental-iterative Prozedur angewandt, indem die Kontaktrandbedingungen aus der Potentialenergiedifferenz der Kontaktkräfte für zwei aufeinanderfolgende Iterationen bestimmt werden. Chaudhary und Bathe (1986) geben die Lösung der räumlichen Kontakt- und Stoßaufgaben mit Reibung mittels der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode an.

Von den anderen Arbeiten, die in den letzten Jahren veröffentlicht wurden, sollen noch die Beiträge von Haber und Hariandja (1985) und von Böhm (1987) genannt werden. Die erstgenannten Autoren verwenden eine gemischte Euler-Lagrange Darstellung (ELD). Die Arbeit von Böhm enthält eine Übersicht über die verschiedenen Prozeduren, die bei Kontaktproblemen angewandt wurden. Ferner werden eigene Ergebnisse des 2D-Kontaktproblems mit Reibung vorgestellt.

Als Ausgangspunkt weiterführender Untersuchungen werden im folgenden Kontaktprobleme elastischer Körper analysiert. Es wird zunächst ein ideales Reibungsmodell angenommen, nach dem der Reibungskoeffizient vom Belastungs- und Gleitwert unabhängig ist (Reibungskoeffizient ist konstant). Thermische und dynamische Effekte bleiben unberücksichtigt. Die Rauhigkeit der Kontaktflächen wird erfaßt, die Kontaktkräfte in der tangentialen Richtung sind durch das Reibungsgesetz nach Coulomb begrenzt.

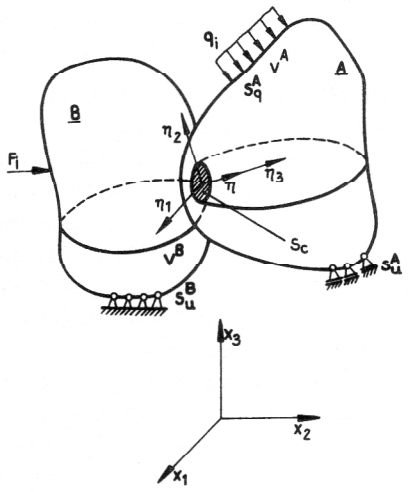


Bild 1
Schematische Darstellung eines Kontaktproblems

x_1, x_2, x_3	–	globale Koordinaten
η_1, η_2, η_3	–	lokale Koordinaten
n	–	Normaleneinheitsvektor
$V = V^A \cup V^B$	–	Volumen der Körper A und B
$S = S^A \cup S^B$	–	Oberfläche der Körper A und B
$S_q = S_q^A \cup S_q^B$	–	Oberfläche mit vorgegebenen Kräften
$S_u = S_u^A \cup S_u^B$	–	Oberfläche mit vorgegebenen Verschiebungen
S_c	–	mögliche gemeinsame Kontaktfläche

Bild 1 zeigt zwei elastische Körper, die sich im Kontaktzustand befinden. Die beiden Körper haben eine gemeinsame Oberfläche, die Berührungsfläche Sc. In der Kontaktzone wird ein lokales Koordinatensystem η_1, η_2, η_3 eingetragen. Das lokale Koordinatensystem ist mit dem unteren Körper B verbunden, dabei wurde die Achse η_3 über einen normalen Einheitsvektor zu S_c bezeichnet. V^A und V^B sind die Volumina der elastischen Körper A und B und S^A und S^B die dazu gehörenden Oberflächen. Die äußeren Belastungen sind als Druckverteilung q_i auf der Teilfläche S_q und als Einzelkräfte F_i vorgegeben. Auf dem Teilbereich S_u^A und S_u^B sind die Verschiebungsrandbedingungen vorgeschrieben.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Finite-Elemente-Formulierung zur Lösung von statischen Kontaktproblemen für linear-elastische isotrope Werkstoffeigenschaften vor. Die Randbedingungen in der Kontaktzone werden mit Hilfe eines direkten Verfahrens erfüllt. Es werden ausgewählte Beispiele berechnet, die erzielten Ergebnisse werden mit Literaturergebnissen verglichen und als Referenzlösungen für verallgemeinerte Kontaktmodelle angegeben. Es erfolgte hier eine Beschränkung auf ebene und axialsymmetrische Kontaktaufgaben. Hierfür wurde ein FORTRAN-Programm erarbeitet und getestet. Die ausgewählten Beispiele (elastischer Stempel auf der isotropen, elastischen Halbebene, starrer hohler Stempel auf dem elastischen, isotropen Halbraum) können mit analytischen und numerischen Ergebnissen anderer Autoren verglichen werden.

3. Formulierung der FE-Lösung

Bei der FEM-Formulierung von Kontaktaufgaben tritt eine Schwierigkeit auf, die mit der Diskontinuität der Kontaktzone S_c verbunden ist. Man kann daher das System von zwei Körpern nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen betrachten. Das Prinzip der virtuellen Arbeit behält unmittelbar seine Gültigkeit, wenn zusätzliche Voraussetzungen hinsichtlich der Kontinuität der Spannungen σ_{ij} und des Verschiebungsvektors u_j in der Kontaktfläche erfüllt werden. In der Kontaktzone muß die Normalspannung $\sigma_{ij} n_j$ gleich dem Kontaktspannungsvektor p_i sein und die Verschiebung $u_j n_j$ muß gleich der Kontaktverschiebung in der normalen Richtung u_3 sein, n_j ist der Normalen-Einheitsvektor. Unter diesen Voraussetzungen ist die direkte Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit auch auf Kontaktprobleme möglich:

$$\int_{V^A \cup V^B} \sigma_{ij}\, \delta \epsilon_{ij}\, dV + \int_{S_c} p_\alpha\, \delta v_\alpha\, dS = \int_{S_q} q_i\, \delta u_i\, dS + \int_{V^A \cup V^B} F_i\, \delta u_i\, dV \qquad (3.1)$$

$\delta \epsilon_{ij}$, δv_α, δu_i sind die virtuelle Verzerrung, das virtuelle Gleiten in der Kontaktzone und die virtuelle Verschiebung. Die Diskretisierung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode ergibt aus (3.1) folgendes Gleichungssystem:

$$[K]\{u\} = \{P\} + \{R\} \qquad (3.2)$$

$\{u\}$ ist der Vektor der Knotenverschiebungen, [K] die gesamte Steifigkeitsmatrix, $\{R\}$ der Vektor der Reaktionskräfte (Kontaktkräfte), $\{P\}$ der Vektor der Knotenkräfte. Vor der Lösung des Gleichungssystems (3.2) müssen auch die Verschiebungsrandbedingungen

$$u_i = \bar{u}_i \tag{3.3}$$

an der Randfläche S_u^A und S_u^B berücksichtigt werden.

4. Kontaktrandbedingungen für 2D-Probleme

Zwei Körper A und B werden so in finite Elemente unterteilt, daß der Knoten j des oberen Körpers A sich in einem Kontakt mit dem Knoten k des unteren Körpers befindet (Bild 2). Die in einem Kontakt stehenden Knoten stellen die Kontaktpaare j, k dar. Das bestimmte Knotenpaar j, k kann sich in einem von drei Bereichen befinden:

- Haft- oder Adhäsionsbereich
- Gleitbereich
- Klaffungsbereich (der Kontakt ist offen).

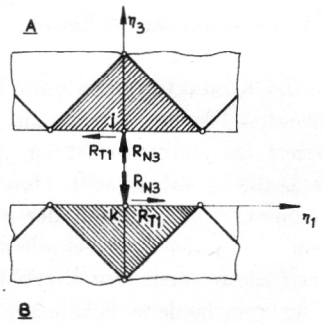


Bild 2
Kontaktkräfte in einem Kontaktpaar (j, k)

4.1. Adhäsionszustand

Die Reaktionskräfte in der Kontaktfläche lassen sich in die zur Kontaktfläche normalen und tangentialen Vektoren aufspalten. Da der elastische Körper A nicht auf dem Körper B fest haftet, können in normaler Richtung nur Druckspannungen auftreten, d. h.

$$R_{N3} \leqslant 0 \tag{4.1}$$

Unter Berücksichtigung des Coulombschen Reibungsgesetzes erhält man für die Tangentialkräfte weitere Randbedingungen

$$R_{T1} \leqslant -\mu R_{N3} \tag{4.2}$$

Während des Kontaktvorganges darf keine Durchdringung des Körpers A und B erfolgen

$$|\bar{u}_A| \leqslant |\bar{u}_B| \tag{4.3}$$

d. h. die Verschiebung des Körpers A in normaler Richtung müssen gegenüber der Kontaktfläche kleiner oder gleich der Verschiebungen des Körpers B sein. Für den Adhäsionszustand in den Kontaktpaaren j, k gilt folgende Bedingung:

$$\{u_j\} = \{u_k\} \tag{4.4}$$

wobei u_j, u_k – Verschiebungen der Knoten j und k sind.

Das Streichen der Knotenverschiebung u_j des Knotens j aus dem globalen Verschiebungsvektor $\{u\}$ mit Hilfe (4.4) führt auf den neuen Verschiebungsvektor $\{u_A\}$, der jetzt dem Adhäsionszustand entspricht. Es gilt dabei folgende Umformung des globalen Verschiebungsvektors $\{u\}$

$$\{u\} = [c_A]^T \{u_A\} \tag{4.5}$$

$[c_A]^T$ – transponierte Einheitsumformungsmatrix für den Adhäsionszustand (vgl. Anhang).

Für den Adhäsionszustand wird das Gleichungssystem (3.2) entsprechend umgeformt und man erhält ein neues Gleichungssystem:

$$[K_A]\{u_A\} = \{R_A\} + \{P_A\} \tag{4.6}$$

wobei
$$[K_A] = [c_A][K][c_A]^T$$
$$\{P_A\} = [c_A]\{P\} \tag{4.7}$$
$$\{R_A\} = [c_A]\{P\}$$

4.2. Zustand des Gleitens

Das Gleiten an dem bestimmten Punkt der Kontaktfläche S_c ist möglich, wenn

$$R_{T1} > -\mu R_{N3} \tag{4.8}$$

R_{T1}-tangentiale Kraft, μ-makroskopischer konstanter Reibungskoeffizient

Beim Auftreten des Gleitens für das Kontaktpaar j, k gilt die Bedingung (4.4) nur in normaler Richtung

$$\{u_{j3}\} = \{u_{k3}\} \tag{4.9}$$

u_{j3}, u_{k3} – normale Verschiebungen der Knoten j und k.

Der Gleitwert wird nach (4.10) berechnet

$$\{v_e\} = \{v_{j1}\} - \{v_{k1}\} \tag{4.10}$$

v_{j1} und v_{k1} sind die Verschiebungen der Knoten j und k in der tangentialen Richtung.

Für den Gleitzustand gilt folgende Umformung des klobalen Verschiebungsvektors $\{u\}$.

$$\{u\} = [c_G]^T \{u_G\} \tag{4.11}$$

$[c_G]^T$ – transponierte Einheitsumformungsmatrix den Gleitzustand (vgl. Anhang).

In dem Verschiebungsvektor $\{u_G\}$ ist mit Hilfe (4.9) die dem Knoten j entsprechende normale Komponente $\{u_{j3}\}$ zu eliminieren. Für den Gleitzustand wird das Gleichungssystem (3.2) in ein neues Gleichungssystem umgeformt:

$$[K]\{u_G\} - \{P_G\} + \{R_G\} \tag{4.12}$$

wobei $[K_G] = [c_G][K][c_G]^T$

$$\{R_G\} = [c_G]\{R\} \qquad (4.13)$$

$$\{P_G\} = [c_G]\{P\}$$

wo $[c_G]$ – Einheitsumformungsmatrix für den Gleitzustand (vgl. Anhang).

4.3. Klaffungszustand (Abheben)

Nach dem Lastangriff kann sich heruasstellen, daß für das bestimmte Knotenpaar j, k die Bedingung (4.1)

$$R_{N3} \leqslant 0$$

nicht mehr erfüllt wird. In diesem Fall wird bei einer iterativen Lösung im nachfolgenden Schritt dieses Knotenpaar als getrennt angenommen.

5. Algorithmus zur Berechnung des Kontaktproblems mit Coulombscher Reibung

In dem ersten Iterationsschritt wird vorausgesetzt, daß alle Knotenpaare „haften" (sie befinden sich im Adhäsionszustand). Für die so angenommenen Bedingungen löst man das lineare Gleichungssystem (4.6) auf. Aus den erhaltenen Verschiebungen ergeben sich die tangentialen R_{T1} und die normalen Kontaktkräfte R_{N3}. In Anlehnung an die Werte der Kontaktkräfte und Kontaktrandbedingungen modifiziert man das Gleichungssystem gemäß dem Adhäsions-, Gleit- bzw. Klaffungszustand und das gesamte System der linearen Gleichungen wird wieder gelöst.

Der Iterationsvorgang ist beendet, wenn für alle Knotenpaare der Adhäsionszustand erfüllt wurde. Das bedeutet, daß die tangentialen Kräfte R_{T1} gleiche oder kleinere Werte als die Reibungskräfte R_{N3} erreichen.
Die auftretende Gleitkraft wird aus der Normalkraft bestimmt

$$R_{G1} = -\mu R_{N3} \operatorname{sign}(R_{T1}) \qquad (4.14)$$

wo: R_{N3} – normale Kraft, R_{T1} – tangentiale Kraft.

Der Aufbau des Lösungsalgorithmus wurde auf Bild 3 gezeigt.

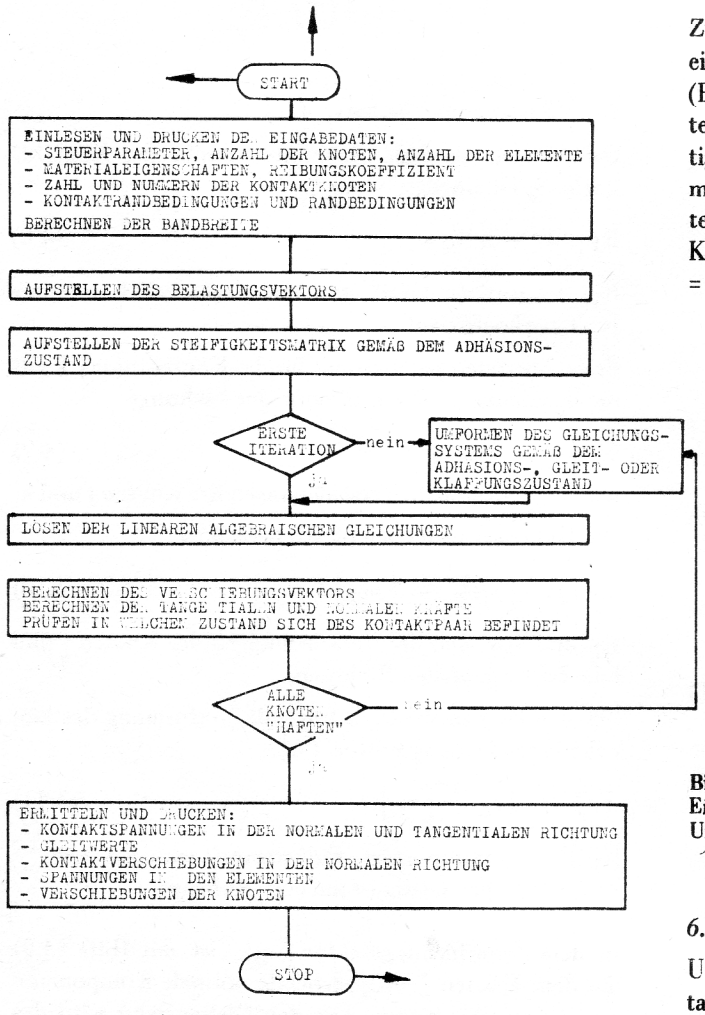


Bild 3
Algorithmus zur Lösung des Kontaktproblems mit Coulombscher Reibung.

6. Numerische Beispiele für Kontaktbedingungen

6.1. Rechteckscheibe auf starrer Ebene

Zunächst wird das Kontaktproblem ohne Reibung einer einzelkraftbelasteten Rechteckscheibe auf starrer Ebene (Bild 4) analysiert. Die äußere Belastung wird in der Mitte der Rechteckscheibe aufgebracht. Durch Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften der Struktur ist es möglich, nur die Hälfte der Rechteckscheibe zu betrachten. Bild 5 zeigt die normale Druckverteilung längs der Kontaktzone für verschiedene Scheibenhöhen. Für h/l = 0,25 und h/l = 0,5 heben die Scheibenenden ab.

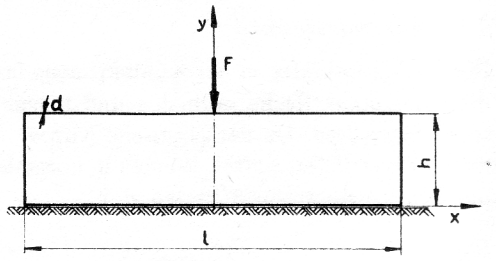


Bild 4
Einzelkraftbelastete elastische Rechteckscheibe auf starrer Unterlage

6.2. Elastischer Stempel auf elastischer Halbebene

Um die Kontaktspannungen und Gleitwerte an der Kontaktzone zu ermitteln, wird das Problem des elastischen Stempels auf elastischer Unterlage analysiert (Bild 6). Die äußere Belastung wird hier durch eine Flächenlast p_o in normaler Richtung und αp_o tangentialer Richtung aufgebracht. Um den Einfluß der FE-Diskretisierung auf

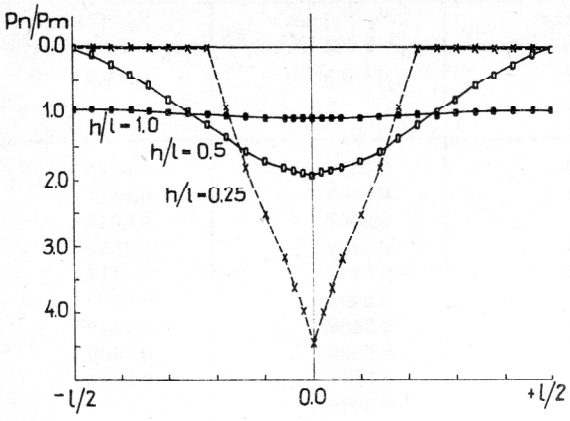


Bild 5
Kontaktdruckverteilungen p_n/p_m zwischen Rechteckscheibe und starrer Unterlage:

$F = 2$ kN, $l = 500$ mm, $d = 10$ mm, $E = 95\,000$ N/mm^2, $\nu = 0{,}25$, $\mu = 0$

p_n – Kontaktdruck p_m – mittlerer Druck: $p_m = F/ld$

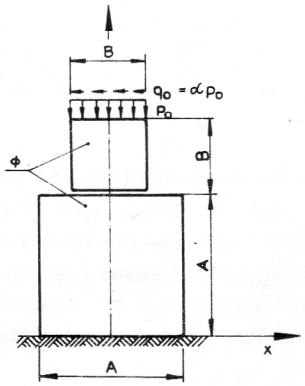


Bild 6
Elastischer Stempel auf elastischer Halbebene:
$A = 190$ mm, $B = 100$ mm, $d = 10$ mm, $E = 4000$ N/mm^2

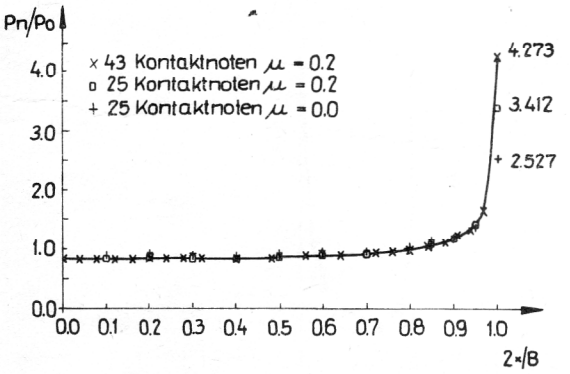


Bild 7
Kontaktdruckverteilungen p_n/p_o zwischen elastischem Stempel und elastischer Halbebene für verschiedene Reibungskoeffizienten μ und unterschiedliche Vernetzungen

$p_o = 1{,}2$ N/mm^2; $\alpha = 0$

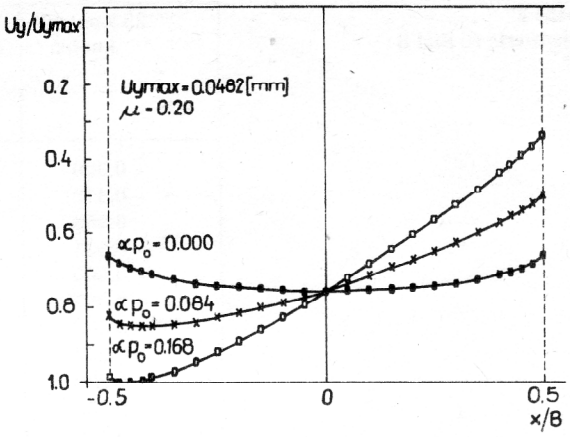


Bild 8
Normalverschiebungen u_y des elastischen Stempels im Kontaktbereich Stempel – Halbebene für unterschiedliche tangentiale Belastungen:

$\mu = 0{,}2$, $u_{ymax} = 0{,}0482$ mm ($x/B = 0{,}5$; $q_o = 0{,}168$ N/mm^2)

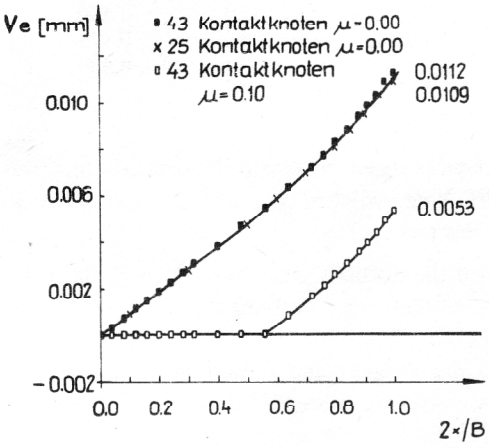


Bild 9
Gleitwerte v_e (relative tangentiale Verschiebungen) in der Kontaktzone Stempel – Halbebene für unterschiedliche μ-Werte und unterschiedliche Vernetzungen

Tabelle 1
Zahlenwerte zu Bild 7 und Bild 9

25 Kontaktknoten 2x/B	p_n/p_o $\alpha p_o = 0.0$ [N/mm^2] $\mu = 0.2$	v_e [mm] $\alpha p_o = 0.0$ [N/mm^2] $\mu = 0.0$
0.00	0.8507	0.0000
0.10	0.8417	0.0009
0.20	0.8556	0.0019
0.30	0.8438	0.0028
0.40	0.8452	0.0038
0.50	0.8680	0.0048
0.60	0.9252	0.0059
0.70	0.9289	0.0070
0.80	1.0215	0.0081
0.85	1.0910	0.0088
0.90	1.1774	0.0096
0.95	1.4254	0.0104
1.00	3.4123	0.0109

Tabelle 2
Zahlenwerte zu Bild 8

25 Kontaktknoten x/B	u_y/u_{ymax} $\alpha p_o = 0.168$ [N/mm^2] $\mu = 0.2$	u_y/u_{ymax} $\alpha p_o = 0.084$ [N/mm^2] $\mu = 0.2$	u_y/u_{ymax} $\alpha p_o = 0.0$ [N/mm^2] $\mu = 0.2$
– 0.500	0.9830	0.8209	0.6599
– 0.475	0.9994	0.8403	0.6817
– 0.450	1.000	0.8467	0.6942
– 0.425	0.9948	0.8489	0.7034
– 0.400	0.9842	0.8497	0.7115
– 0.350	0.9687	0.8463	0.7240
– 0.300	0.9458	0.8400	0.7342
– 0.250	0.9172	0.8289	0.7406
– 0.200	0.8878	0.8171	0.7463
– 0.150	0.8565	0.8036	0.7504
– 0.100	0.8244	0.7893	0.7538
– 0.050	0.7912	0.7738	0.7559
0.000	0.7562	0.7566	0.7565
0.050	0.7200	0.7383	0.7559
0.100	0.6824	0.7186	0.7539
0.150	0.6436	0.6975	0.7504
0.200	0.6041	0.6757	0.7463
0.250	0.5632	0.6525	0.7406
0.300	0.5217	0.6285	0.7342
0.350	0.4792	0.6019	0.7238
0.400	0.4339	0.5734	0.7115
0.425	0.4109	0.5579	0.7031
0.450	0.3876	0.5417	0.6939
0.475	0.3632	0.5233	0.6816
0.500	0.3362	0.4990	0.6597

die Kontaktspannungen zu ermitteln, wurden hier verschiedene FE-Netzverdichtungen mit 25 und 43 Kontaktknoten angenommen.

In Bild 7 wird die normale Druckverteilung in der Kontaktzone für verschiedene Reibungskoeffizienten vorgestellt (Tabelle 1).
Den Einfluß der tangentialen Belastung auf die normalen Verschiebungen u_y zeigt Bild 8 für ein FE-Netz mit 25 Kontaktknoten (Tabelle 2).

Bild 9 zeigt die Gleitwerte v_c für verschiedene Reibungsmodelle und verschiedene Zahl der Kontaktknoten. Für eine feine FE-Diskretisierung (größere Zahl der Kontaktknoten) erreichen die normalen Kontaktspannungen am Scheibenrand größerer Werte. Die ermittelten Ergebnisse wurden mit den Ergebnissen von Frederiksson (1976a) verglichen. Es wurde eine gute Übereinstimmung der eigenen Ergebnisse mit FE-Berechnungen nach Frederiksson festgestellt. Genaue Ergebnisse der Lösung des elastischen Stempels auf der elastischen Halbebene sind aus den Tabellen 1 und 2 zu entnehmen.

6.3. *Starrer Hohlzylinder auf elastischem Halbraum*

Eine umfangreiche Besprechung der Lösungen dieses Problems ohne Reibung kann man in den Monografien von Galin (Hg.) (1976) und Gladwell (1980) finden. Die analytische Lösung des starren hohlen Zylinders auf ela-

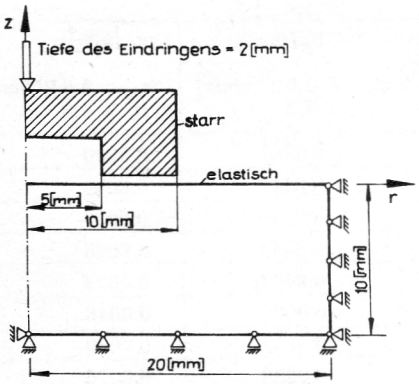


Bild 10
Modell für die Kontaktaufgabe starrer Hohlzylinder Stempel auf elastischem Halbraum:
E = 1000 N/mm^2, $\nu = 0.3$; $\mu = 0.3$

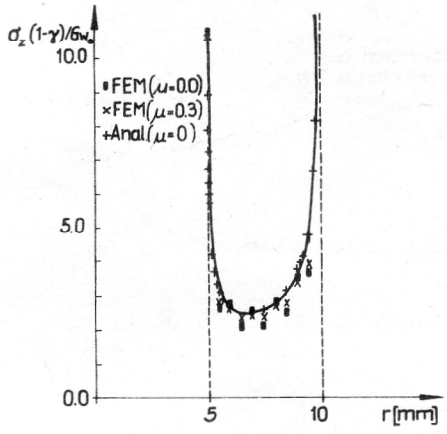
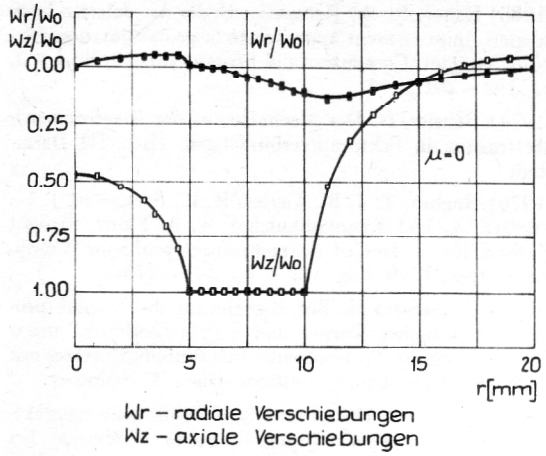


Bild 11
Kontaktdruckverteilungen $\sigma_z (1 - \nu)/Gw_o$ zwischen starrem Hohlzylinderstempel und elastischem Halbraum für $\mu = 0$ und $\mu = 0{,}3$. Vergleich der FEM-Lösung für $\mu = 0$ mit der analytischen Lösung nach Borodatchev



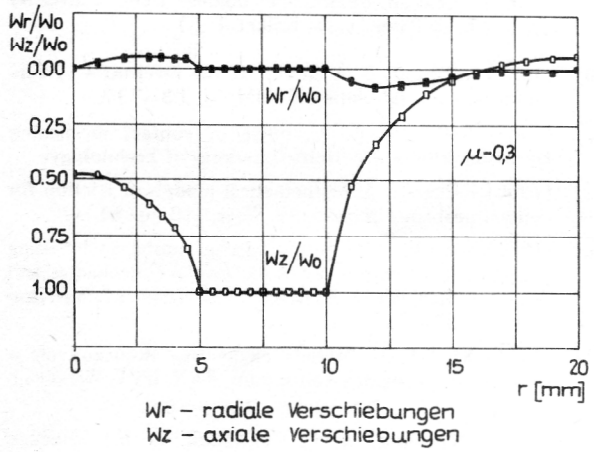


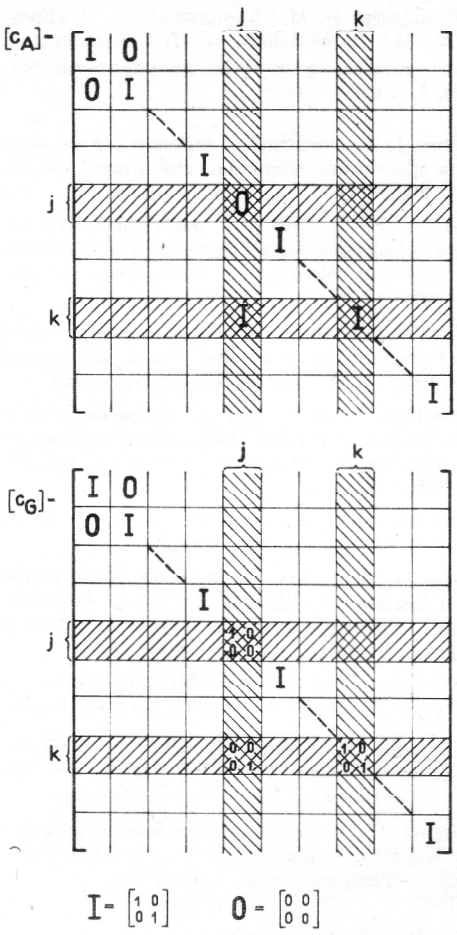
Bild 12
Radiale (tangentiale) Verschiebungen w_r/w_o und axiale (normale) Verschiebungen w_z/w_o des elastischen Halbraumes (z = 0) beim Eindringen des starren Hohlzylinderstempels
Eindringtiefe: w_o = 2 mm
a) μ = 0
b) μ = 0,3 (totales Haften aller Knoten im Kontaktbereich)

stischem Halbraum (Bild 10) bei totalem Haften ($\mu = \infty$) haben als erste Shibuya u. a. (1980) angegeben. Campos, Oden und Kikuchi (1982) stellten die numerische Lösung dieses Problems bei totalem Haften und ohne Reibung vor. Die Bilder 11 und 12 zeigen eigene Ergebnisse zu dieser Aufgabe. Bild 11 zeigt die normale Kontaktdruckverteilung in der Kontaktzone im Vergleich zur analytischen Lösung nach Borodatchev u. a. (1966). Die normalen Kontaktspannungen hängen nur gering vom Reibungskoeffizienten ab.

Bild 12 zeigt die radialen Verschiebungen w_r und die normalen Verschiebungen w_z in der Kontaktzone. Die eigenen Ergebnisse stimmen gut mit den numerischen Berechnungen nach Campos u. a. (1982) überein.

Der starre Zylinder wurde hier so modelliert, daß der Elastizitätsmodul des Zylinders 10^4mal größer als der Elastizitätsmodul der elastischen Unterlage angenommen wurde.

Anhang



LITERATUR

[1] (1983) Александров, В. М.: Мхитарян, С. М. (Aleksandrov, W. M., Mhitarjan, S. M.); Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Москва. Наука.

[2] (1986) Александров, В. М.; Ромалис, Б. Л.; Aleksandrov, W. M.; Romalis, B. L.) Контактные задачи в машиностроении. Москва. Машиностроение.

[3] (1982) Altenbach, J., Sacharov, A. S. (Hrg.) Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. Leipzig, VEB Fachbuchverlag.

[4] (1986) Argyris, J. H., Mlejnek, H.-P. Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik: Bd. 1: Verschiebungsmethode in der Statik. Braunschweig, Vieweg.

[5] (1987) Argyris, J. H., Mlejnek, H.-P. Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik. Bd. 2: Kraft- und gemischte Methoden. Nichtlinearitäten, Braunschweig, Vieweg.

[6] (1986) Bathe, K.-J. Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag.

[7] (1984) Bathe, K.-J. Chaudhary, A. On finite element analysis of large deformation frictional contact problems. Proc. of the 7th. Invatational Symp. on the Unification of Finite Elements. Finite Diferences and Calculus of Varations. Univ. of Conn. Stors, C. T.

[8] (1985) Bathe, K.-J. Chaudhary, A. A solution method for planar axisymmetric contact problems. Int. j. numer. methods eng., vol. 21, pp. 65 – 88.

[9] (1985) Blisse, T. Realisierung und Testung eines einfachen Algorithmus zur Erfassung von Kontaktproblemen im PS COSAR, DA, TH Magdeburg.

[10] (1959) Bowden, F. P., Tabor, D. Reibung und Schmierung fester Körper, Springer-Verlag.

[11] (1966) Бородачев, Н. М.: Бородачева, Ф. Н. (Borodatchev, N. M.; Borodatcheva, F. N.) Вдавливание кольцевово штампа в упругое полупространство. M. T. T. Nr. 4, c. 158 – 161.

[12] (1987) Böhm, J. A comparison of different contact algorithms with applications. Computers and Struct., vol. 26, Nr. 1/2, pp. 207 – 221.

[13] (1982) Campos, L. T., Oden, J. T. and Kikuchi, N. A numerical analysis of class contact problems with friction in elastostatics. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 34, pp. 821 – 845.

[14] (1971) Chan, S. K., Tuba, I. S. A finite element method for contact problems of solid bodies. Part I. Theory and Validation. Int. J. Mech. Sci., vol. 13., pp. 615 – 625.

[15] (1986) Chaudhary, A., Bathe, K.-J. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. Computers and Struct., vol. 24, Nr. 6, pp. 855 – 873.

[16] (1984) Curnier, A. A theory of friction. Int. J. Solids Structures, vol. 20, Nr. 7, pp. 637 – 647.

[17] (1985) Desai, I. D., Mistry, B. B., Patel, B. M. Stripp footing-soil interaction with loss of contact. Proc. Int. Conf. Finite Elements in Computational Mechanics. Bombay, India, 2 – 6 Dec., pp. 475 – 485.

[18] (1980) Дюво, Г.; Лионс, Ж. Л. (Duvaut, G.; Lions, J. L.) Неравенства в механике и физике. Москва. Наука.

[19] (1981) Feldmann, H. Spannungsberechnung an Gewinden von Schraube-Mutter-Verbindungen mittels der Methode der finiten Elemente. Diss. TU Braunschwerg.

[20] (1974) Fischer, F. D. Zur Lösung des Kontaktproblems elastischer Körper mit ausgedehnter Kontaktfläche durch quadratische Programmierung. Computing, vol. 13, S. 353 – 384.

[21] (1987a) Fischer, U., Hoyer, U., Melosh, R. J. Lösung diskretisierter Kontaktprobleme unter Verwendung der linearen Optimierung. Technische Mechanik 8, Heft 2, S. 52 – 56.

[22] (1987b) Fischer, U., Melosh, R. J. Solving discretized contact problems using linear programming. Computers and Struct., vol. 25, Nr. 5, pp. 661 – 665.

[23] (1980) Fleischer, G., Gröger, H., Thum, H. Verschleiß und Zuverlässigkeit. Berlin, VEB Verlag Technik.

[24] (1975) Francavilla, A., Zienkiewicz, O. C. A note on numerical computation of elastic contact problems. Int. j. numer. methods eng. vol. 9, pp. 913 – 924.

[25] (1976a) Fredriksson, B. On elastic contact problems with frictions. A finite element analysis Diss. Nr. 6, Linköping University.

[26] (1976b) Fredriksson, B. Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics. Computers and Struct. vol. 6, pp. 281 – 290.

[27] (1983) Gabbert, U. Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in der FEM mittels der Penalty-Funktion Methode. Technische Mechanik, Heft 1, S. 40 – 46.

[28] (1977) Gaertner, R. Investigation of plan elastic contact allowing of friction. Computers and Struct. vol. 7, pp. 59 – 63.

[29] (1976) Галин, Л. А. (Galin, L. A. Hrsg.) Развитие теории контактных задач в СССР. Москва. Наука.

[30] (1980) Галин, Л. А. (Galin, L. A.) Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва. Наука.

[31] (1980) Gladwell, G. M. L. Contact problems in the classical theory of elasticity. Sijthoff and Nordhoff. Alphen aan Rijn. The Netherlands.

[32] (1968) Goodman, R. E., Taylor, R. L., Brekke, T. L. A model for the mechanics of jointed rock. J. of Soil Mechanics and Foundation, Div. ASCE, vol. 94, pp. 637 – 659.

[33] (1985) Haber, R. B., Hariandja, B. H. An eulerian-langrangian finite element approach to large-deformation frictional contact. Computers and Struct., vol. 20, Nr. 1 – 3, pp. 193 – 201.

[34] (1974) Häusler, N. Der Mechanismus der Biegemomentübertragung in Schrumpfverbindungen. Diss. TH Darmstadt.

[35] (1976) Hughes, T. J. R., Taylor, R. L., Sacksman, J. L., Curnier, A. and Kanoknukulchai, W. A. Finite element method for a class of contact-impact problems. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 8, pp. 249 – 276.

[36] (1984) Idelberger, H. Zur Berechnung des Kontaktproblems „elastischer Körper und starres Hindernis" unter Berücksichtigung des Coulombschen Reibungsgesetzes mit Hilfe der Finite-Element-Methode. Diss. TU Hannover.

[37] (1983) Jacobi, W. Das geometrisch nichtlineare Kontaktproblem „Elastischer Körper – starres Hindernis" bei verformungsabhängiger Belastung als restringiertes Minimumproblem. Diss. TU Hannover.

[38] (1985) Johnson, K. L. Contact mechanics. Cambrigde University Press.

[39] (1975) Kalker, J. J. Aspect of contact mechanics. The contact between deformable bodies. Delft University Press (eds. de Pater, A. D., Kalker, J. J.)

[40] (1977) Kalker, J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies. ZAMM, 75, T3 – T17.

[41] (1985) Kalker, J. J. A course of contact mechanics. December 1985a 79c. Delft University of Technology.

[42] (1986) Kalker, J. J. Mathematical models of friction for contact problems in elasticity. Wear, 113, pp. 61 – 77.

[43] (1982) Kikuchi, N. Friction contact problems by using penalty regularization methods. Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. University of Waterloo Press, pp. 37 – 59.

[44] (1985) Kleiber, M. Metoda elementow skonczonych w nieliniowej mechanice kontinuum. PAN, IPPT, Warszawa-Poznan.

[45] (1981) Кравчук, А. С. (Kravchuk, A. S.) Решение некоторых пространственных контактных задач с учстом трения на поверхности соприкосновиениа Трение и Износ. Т. 2. Нр. 4. с. 589 – 595.

[46] (1987) Кузьменко, В. И. (Kuzmenko, W. I.) Контактные задачи теории пластичности ц учетом трения на контактной поверхности. Трение и Износ. Т. 1, Нр. 1, с. 45 – 52.

[47] (1982) Kragelski, I. V., Dobycin, M. N., Kombalov, V. S. Grundlagen der Berechnung von Reibung und Verschleiß, VEB Verlag Technik Berlin.

[48] (1983) Leidich, E. Beanspruchung von Preßverbindungen in elastischem Bereich und Auslegung gegen Dauerbruch. Diss. TH Darmstadt.

[49] (1983) Mazurkiewicz, M. Ostachowicz, W. Theory of finite elemente method for elastic contact problems of solid bodies, Computers and Struct. vol. 17, Nr. 1. pp. 51 – 59.

[50] (1986) McCool, J. I. Comparison of models for the contact of rough surfaces. Wear, 107, pp. 37 – 60.

[51] (1985) Моссаковский, В. М.; Качаловская, Н. Е.; Голикова, С. С. (Mossakovski, W. M. u. a.) Контактные задачи математической теории упругости. Киев. Наукова Думка.

[52] (1983a) Oden, J. T., Pires, E. B. Nonlocal and nonlinear friction laws and varational princeples for contact problems in elasticity, J. of Appl. Mech., vol. 50, pp. 67 – 76.

[53] (1983b) Oden, J. T., Pires, E. B. Numerical analysis of certian contact problems in elasticity with non-classical friction law. Computers and Struct., vol. 16, Nr. 1 – 4, pp. 481 – 485.

[54] (1984) Oden, J. T., Pires, E. B. Algoritms and numerical results for finite element approximation of contact problems with non-classical friction laws. Computers and Struct. vol. 19, Nr. 1 – 2, pp. 137 – 147.

[55] (1982) Oden, J. T., Kikuchi, N. Finite element method for constrained problems in elasticity. Int. j. numer. methods eng. vol. 18, pp. 701 – 725.

[56] (1981) Oden, J. T. Exterior penalty methods for contact problems in elasticity. Nonlinear finite element analysis in structural mechanics. eds. Wunderlich, W., Stein, E. and Bathe, K.-J., Springer-Verlag, pp. 655 – 665.

[57] (1985) Oden, J. T., Martins, J. A. C. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 52, pp. 527 – 634.

[58] (1973) Ohte, S. Finite element analysis of elastic contact problems. Bull. of the J. S. M. E., Vol. 16, Nr. 95, pp. 797 – 804.

[59] (1979) Okamoto, N., Nakazawa, M. Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions. Int. j. numer. methods eng., vol. 14, pp. 337 – 357.

[60] (1984) Ostachowicz, W. Hybrydowa metoda elementow skonczonych w zagadnieniu kontaktowym. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 22, 1/2, s. 135 – 149.

[61] (1975) Panagiotopoulos, P. D. A nonlinear programming approach to the unilateral contact and friction boundary value problem in theory of elasticity. Ing.-Arch., 44, pp. 421 – 432.

[62] (1977) Panagiotopoulos, P. D. On the unilateral contact problem of structures with a non quadratic strain energy density. Int. J. Solids Structures, vol. 13, pp. 253 – 261.

[63] (1985) Rothert, H., Idelberger, H., Jacobi, W., Niemann, L., On geometrically nonlinear contact problems with friction., Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 51, pp. 139 – 155.

[64] (1977) Рвачев, В. Л.; Проценко, В. С. (Rvatchev, W. L., Procenko, W. S.) Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев. Наукова Думка.

[65] (1975) Schäfer, H. A. A contribution to the solution of contact problems with the aid of band elements. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 6, pp. 335 – 354.

[66] (1981) Sachdeva, T. D., Ramakrishnan, C. V. A finite element solution for the two dimensional elastic contact problems with friction., Int. j. numer. methods eng., vol. 17, Nr. 8, pp. 1257 – 1271.

[67] (1983) Sachdeva, T. D., Ramakrishnan, C. V. Out-of-plane flexibilities of dovetail joints in machine tool structures., Computers and Struct., vol. 17, Nr. 4, pp. 524 – 538

[68] (1979) Schomburg, U. Die Penalty Methode mit finiten Elementen in der Technischen Mechanik. Habilitationsschrift. RWTH Aachen.

[69] (1980) Shibuya, T., Koizumi, T., Nakahara, I. An elastic contact problem for a halb-space idented by a flat annular rigid stamp in the presence of adhesion. Proc. 25the Japan National Congress for Applied Mechanics. University of Tokyo Press. vol. 25, pp. 497 – 504.

[70] (1986) Skalski, K. Zagadnienie kontaktowe dla ciala sprezysto-plastycznego. PN Mechanika z. 94. Politechnika Warszawska.

[71] (1979) Stadter, J. T., Weiss, R. O. Analysis of contact through finite element gaps. Computers and Struct., vol. 10, pp. 867 – 873.

[72] (1949) Штаерман, И. Я. (Shtaerman, I. Ja.) Контактная задача теори упругости. Москва-Ленинград. Гостехиздат.

[73] (1983) Torstenfelt, B. Contact problems with friction in general purpose finite element computer programs. Computers and Struct. vol. 16, pp. 487 – 493.

[74] (1984) Torstenfelt, B. An automatic incrementation techniqe for contact problems with friction. Computers and Struct., vol. 19, Nr. 3, pp. 393 – 400.

[75] (1973) Tsuta, T. Yamaji, S. Finite element analysis of contact problems. Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis. University of Tokyo Press. pp. 177 – 194.

[76] (1969) White, D. J., Humpherson, J. Finite element analysis of stress in shafts due interference-fit hubs. J. of Strain Analysis vol. 4, Nr. 2, pp. 105 – 115.

[77] (1970) Wilson, E. A., Parsons, B. Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements. Int. j. numer. methods eng., vol. 2, Nr. 3, pp. 387 – 395.

[78] (1978) Witkowski, J. Zagadnienie kontaktu cial odksztalcalnych PN Mechanika, z. 53, Politechnika Warszawska.

[79] (1981) Wriggers, P. Zur Berechnung von Stoß- und Kontaktproblemen mit Hilfe der Finite-Element-Methode. Diss. TU Hannover.

[80] (1972) Zienkiewicz, O. C. Metoda elementow skonczonych. Arkady, Warszawa.

[81] (1983) Zienkiewicz, O. C. Methode der finiten Elemente, Leipzig, VEB Fachbuchverlag.