TECHNISCHE MECHANIK 9 (1988) Heft 4
Manuskripteingang: 05. 07. 1988

Methode zur Beseitigung des Verzweigungsdefekts bei der Synthese von Übertragungsgetrieben

E. E. Peisach, M. A. Pirožkov

0. Einführung

In den letzten Jahren begann man, sich bei der Synthese von Übertragungsgetrieben für die Untersuchung des sogenannten „Verzweigungsdefekts" und für Synthesemethoden zu interessieren, die auf die Beseitigung dieses unerwünschten Effektes gerichtet sind [1] ... [4]. Zuerst wurde der Verzweigungsdefekt am Anfang der 70er Jahre mit grafischen Methoden untersucht. Neuere, kompliziertere Syntheseaufgaben bei räumlichen Mechanismen, aber auch bei ebenen Mechanismen höherer Klassen, deren Lösung dank neuer theoretischer Arbeiten und der Anwendung schneller EDVA möglich wurde, gaben dem Studium dieses Problems neue Impulse.
In vorliegender Arbeit wird eine Synthesemethode für Übertragungsgetriebe dargestellt, welche die Aufteilung in eindeutige Zweige der impliziten Funktion auf der Basis stückweiser Polynom-Approximation benutzt und auf die Lösung von Syntheseaufgaben ohne diesen Verzweigungsdefekt orientiert.

1. Formulierung der Syntheseaufgabe

Die funktionelle Abhängigkeit $y = Y(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$ sei durch eine diskrete Menge von Punkt-Paaren (x_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots N$; $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_N = a$ gegeben. Sie soll mit Hilfe eines Koppelgetriebes mit einem Antrieb angenähert werden. Es wird der Vektor $\underline{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_s)^T$ für konstante geometrische Parameter des Koppelgetriebes einer gegebenen Struktur eingeführt.
α und β sind die veränderlichen Parameter des Antriebs- und Abtriebgliedes; α_o und β_o deren Anfangswerte. $x = \alpha - \alpha_o$ und $y = \beta - \beta_o$ sind die Bewegungen des An- und Abtriebsgliedes. Der Vektor $\underline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$ enthält die bei der Synthese gesuchten Parameter, in denen alle oder ein Teil der konstanten Parameter des Vektors $\underline{R}$ und die Parameter α_o, β_o enthalten sein können.
$\underline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$ sind unabhängige Parameter, so daß $p_i = p_i(\underline{q})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
$y = y(x, \underline{p})$ ist die Lagefunktion des Abtriebs des Mechanismus.
Die Aufgabe besteht in der Bestimmung eines solchen Vektors $\underline{p} = \underline{p}^*$, bei dem die Lagefunktion $y = y(x, \underline{p})$ sich bezüglich irgendeiner Norm (z. B. Fehlerquadrat oder minimale Maximalabweichung) im gegebenen Bereich $[0, a]$ wenig von der gegebenen Funktion $Y = Y(x)$ unterscheidet.

Die Differenzfunktion

$$\Delta(x, \underline{p}) = y(x, \underline{p}) - Y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{1}$$

soll sich wenig von Null unterscheiden. Nach der Bestimmung der Parameter $\underline{p}$ werden die Parameter $\underline{q}$ aus den Beziehungen $p_i = p_i(\underline{q})$ gefunden.

2. Wesen des Verzweigungsdefektes bei der Synthese

Unter der Funktion $y(x, \underline{p})$ in (1) wird die Lagefunktion irgendeiner Montagevariante des Mechanismus verstanden, wobei diese Montagevariante in dem gegebenen Abschnitt $[0, a]$ existieren möge. Da man für viele Koppelgetriebe keinen expliziten analytischen Ausdruck für die Lagefunktion $y(x, \underline{p})$ der unterschiedlichen Montagevarianten erhalten kann, gilt das auch für die Differenz $\Delta(x, \underline{p})$ in Gl. (1). In Verbindung damit muß man bei der Synthese von Mechanismen anstelle der Differenz $\Delta(x, \underline{p})$ die sogenannte gewichtete Differenz $\Delta q(x, \underline{p})$ benutzen.
Oft wählt man für $\Delta q(x, \underline{p})$ die Funktion F aus, die auf der linken Seite der Gl.

$$F(x, y, \underline{p}) = 0 \tag{2}$$

steht, die als Ergebnis der Analyse des Mechanismus erhalten wurde. Diese Funktion F verbindet die Veränderlichen x und y, wobei anstelle von y die gegebene Funktion $Y(x)$ eingesetzt wird.

Damit erhält die gewichtete Differenz die Form

$$\Delta q(x, \underline{p}) = F(x, Y(x), \underline{p}), \quad 0 \leqslant x \leqslant \underline{a} \leqslant 2\pi. \tag{3}$$

Gleichung (2), welche die Abhängigkeit zwischen x und y in impliziter Form ausdrückt, kann für beliebige Koppelgetriebe aufgestellt werden, darunter auch für Mechanismen komplizierter Struktur.

Im allgemeinen Fall existieren im Abschnitt $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ insgesamt M Zweige $y = y_k(x, \underline{p})$, $A_k(\underline{p}) \leqslant x \leqslant B_k(\underline{p})$, $k = 1, 2, \ldots, M$ der mehrdeutigen Funktion F, die implizit durch Gl. (2) gegeben ist. Dabei werden mit $A_k(\underline{p})$ und $B_k(\underline{p})$ die Grenzen des Existenzbereichs des k-ten Zweiges von $y_k(x, \underline{p})$ bezeichnet, welche jeweils stetige und eindeutige Funktionen darstellen. Jede dieser Funktionen $y_k(x, \underline{p})$ entspricht einer Montagevariante des gegebenen Mechanismus, der auch die Nummer k zugeordnet wird. Unter Montagevariante wird eine der möglichen Bauformen des Mechanismus verstanden, die gleiche Abmessungen aller konstanten Parameter $\underline{R}$ haben und sich nur durch die Art des Zusammenbaus der Glieder unterscheiden.

Als Beispiel wird ein 6gliedriger ebener Mechanismus 3. Klasse betrachtet, vgl. Bild 1. Folgende Bezeichnun-

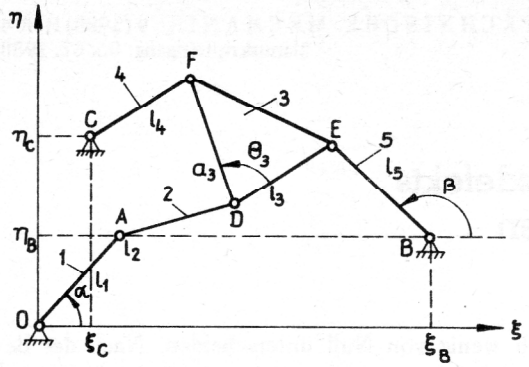


Bild 1

gen und Parameterwerte erhalten die s = 11 konstanten Parameter des Vektors $\underline{R}$ dieses Mechanismus:

$l_1 = 18 \quad l_2 = 168 \quad l_3 = 40 \quad \Theta_3 = -76{,}25°, \quad a_3 = 94$

$l_4 = 45{,}5 \quad l_5 = 100 \quad \xi_B = 10 \quad \eta_B = 92{,}5$

$\xi_c = 60 \quad \eta_c = 92{,}5$

Bild 2 zeigt die Lagefunktionen $\beta = \beta(\alpha)$ für verschiedene mögliche Montagevarianten des Mechanismus bei den oben genannten konstanten Parameterwerten. Aus Bild 3 ist ersichtlich, daß im gegebenen Fall 8 Montagevarianten des Mechanismus existieren, wobei den Montagevarianten 7 und 8 Kurbelschwingen (d. h. sie existieren im ganzen Bereich $0 \leqslant \alpha \leqslant 360°$) und die Montagevarianten 1 bis 6 Doppelschwingen entsprechen. Jede dieser „Doppelschwingen" besitzt ihren Existenzbereich, z. B. gilt für die Montagevariante $A_3 = 206{,}46°$, $B_3 = 331{,}95°$.

Für einen fixierten Winkel α existieren Mechanismen mit den genannten geometrischen Parameterwerten in 2, 4 oder 6 Montagevarianten, wobei die Anzahl dieser Montagevarianten vom konkreten Wert α abhängt. Beispielsweise existieren für $\alpha = 213°$ 6 Montagevarianten, und zwar diejenigen mit den Nummern 1, 2, 3, 6, 7 und 8, vgl. Bild 2.

In Bild 3 ist die Lage der Glieder des betrachteten 6gliedrigen Koppelgetriebes für $\alpha = 213°$ für jede der 6 an dieser Stelle existierenden Montagevarianten dargestellt.

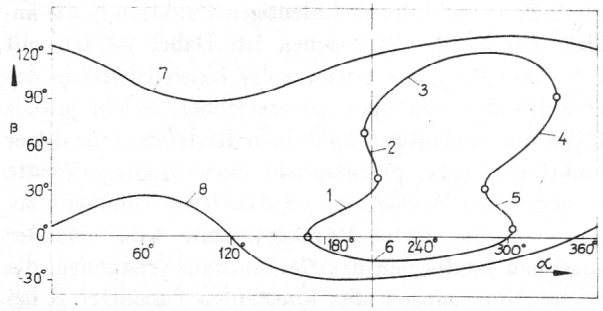


Bild 2

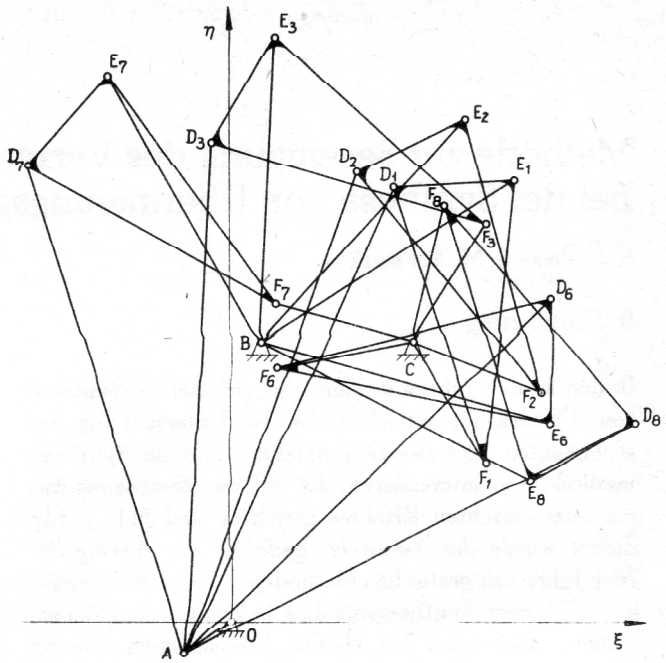


Bild 3

Es gibt heutzutage Algorithmen und Rechenprogramme zur Berechnung der Lagefunktion $y = y_k(x, \underline{p})$ für beliebige Montagevarianten von Koppelgetrieben, welche Prozeduren zur Identifikation der Montagevarianten benutzen [4], [5]. Bei dem in der DDR verbreiteten Programm DAM wird die jeweilige Montagevariante durch die Eingabewerte vorgegeben und davon ausgegangen, daß der Konstrukteur den Mechanismus (und den Existenzbereich der gewählten Montagevariante) so genau kennt, daß keine numerischen Probleme durch Überschreitung der Grenzen der Existenzbereiche und durch Auftreten von Verzweigungen auftreten. Dort müssen Verzweigungspunkte, z. B. durch Vermeidung der Strecklage beim Antiparallelkurbelgetriebe (durch günstige Wahl der Schrittweite und der Anfangslage) vermeiden werden.

Bei der Benutzung der gewichteten Differenz $\Delta q(x, p)$ in Form von (3) besteht die Syntheseaufgabe in der Bestimmung eines solchen Vektors $\underline{p}$, bei welchem Δq am wenigsten von Null (nach irgendeiner Norm) im gegebenen Abschnitt abweicht.

Allerdings enthält die traditionelle Aufgabenstellung der Synthese keine Forderung dazu, daß die gegebene Funktion $Y = Y(x)$ im gesamten gegebenen Abschnitt $[0, a]$ durch die Lagefunktion irgendeiner bestimmten Montagevariante entsprechen soll, d. h. eines Zweigs der mehrdeutigen Funktion, die implizit durch Gl. (2) gegeben ist. Löst man praktische Syntheseaufgaben von Übertragungsgetrieben, so zeigt sich, daß häufig folgende Situation entsteht: Im Abschnitt $[0, a_1]$, wo $0 < a_1 < a$, wird die Funktion $Y = Y(x)$ gut durch die Funktion $y = y_1(x)$ einer Montagevariante (z. B. $k = 1$) approximiert, aber im Abschnitt $[a_1, a]$ durch die Lagefunktion $y = y_2(x)$ einer anderen Montagevariante, z. B. $k = 2$. In manchen Fällen passiert es, daß die gegebene Funktion $Y(x)$ im ganzen Bereich $[0, a]$ durch drei

oder noch mehr Montagevarianten approximiert wird. Diese Erscheinung erhielt die Bezeichnung „Verzweigungsdefekt".

Weil reale Mechanismen stets in irgendeiner konkreten Montagevariante arbeiten, erweist sich im Falle des Verzweigungsdefektes der synthetisierte Mechanismus als unbrauchbar. Er ist ungeeignet, die gegebene Sollfunktion im ganzen Bereich zu erfüllen. Er approximiert sie nur in einem Teil dieses Bereichs.

Zur Vermeidung des Verzweigungsdefektes muß man das approximierende Berechnungsmodell der Syntheseaufgabe so bilden, daß in ihm die Mehrdeutigkeit vermieden wird, die dem Berechnungsmodell gemäß Gl. (3) anhaftet, weil es auf dieselbe Weise gleichzeitig alle möglichen Montagevarianten beschreibt.

3. Methode zur Aufteilung in eindeutige Zweige

Anstelle der Differenz $\Delta(x, \underline{p})$ gemäß Gl. (1) wird die angenäherte Differenz

$$\Delta_a(x, \underline{p}) = y_a(x, \underline{p}) - Y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{4}$$

betrachtet, wobei $Y_a(x, \underline{p})$ eine Näherungsformel für die Lagefunktion einzelner Montagevarianten des Mechanismus ist, d. h. für eindeutige Zweige der Funktion, die implizit durch (2) im ganzen Bereich [0, a] definiert ist.

Die angenäherte Differenz wurde schon früher angewandt, um Syntheseaufgaben bei Mechanismen zu lösen [6], [7]. Allerdings stand dort nicht die Aufgabe, eine Aufteilung in eindeutige Zweige vorzunehmen, weil Mechanismen einfacher Struktur synthetisiert wurden, für die es möglich war, explizite analytische Ausdrücke für die Lagefunktionen der einzelnen Montagevarianten zu erhalten. Die Grundidee der Methode, die in vorliegender Arbeit dargestellt wird, besteht darin, diese Näherungsfunktion für einzelne Montagevarianten in dem Fall anzuwenden, wenn diese Funktion nicht in expliziter Form erhalten werden kann.

Zur Konstruktion der Funktion $y_a(x, \underline{p})$ wird gefordert, daß im Punkt $x = x_1 = 0$ die Bedingung $y_a(x, \underline{p}) = y(x_1, \underline{p}) = y_1$ erfüllt wird, welche der Gleichung

$$F(x_1, y_1, \underline{p}) = 0 \tag{5}$$

äquivalent ist, aus welcher man p_n finden kann, weil gewöhnlich

$$F(x, y, \underline{p}) = F(x, y, p_1, p_2, \ldots, p_{h-1}) + p_n.$$

Indem eine Reihe von Annahmen eingeführt wird, werden fortlaufend die drei Modelle A, B und C für die Lagefunktion der einzelnen Montagevarianten aufgebaut, deren letzte davon zur Funktion $y_a(x, \underline{p})$ deklariert wird.

Aus dem Bereich [0, a] werden die Punkte $x_1 = 0, x_2, \ldots, x_N = a$ in $N - 1$ Abschnitten genommen und die Funktion $y(x, \underline{p})$ in jedem dieser Abschnitte in der Form

$$y_i^A(x, \underline{p}) = y(x_i, \underline{p}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i!} y^{(j)}(x_i, \underline{p})(x - x_i)^j \tag{6}$$

$$x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},$$

$$i = 1, 2, \ldots, N - 1$$

dargestellt. Die Ableitungen $y^{(j)}(x_i, p)$ berechnet man an den Stellen $x = x_i$ nach bekannten Formeln für die Differentiation impliziter Funktionen F, in denen die partiellen Ableitungen $F'_x, F'_y, F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy}$ usw. auftreten.

Die stückweise Darstellung (6) der Funktion $y(x, \underline{p})$, welche Modell A der Lagefunktion der einzelnen Montagevariante genannt wird, wird entsprechend dem Theorem über die analytische Darstellung einer impliziten Funktion genommen.

Anstelle des genauen Modells A wird ein Näherungsmodell B eingeführt:

$$y_i^B(x, \beta) = y(x_{i.p}) + y^{(1)}(x_{i,p})(x - x_i) + \frac{1}{2} y^{(2)}(x_{i,p})(x - x_i)^2, \tag{7}$$

$$x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \quad r = 1, 2, \ldots N - 1$$

Aus (7) ist ersichtlich, daß das Modell B nur stückweise stetig ist, weil Sprünge an den Stützpunkten $x_2, x_3, \ldots, x_N$ auftreten.

Vom Modell B wird zum Modell C übergegangen, in welchem $y(x_i, \underline{p})$ durch Y_i und die Ableitungen $y^{(j)}(x, \underline{p})$ $(j = 1, 2)$ durch ihre Näherungswerte $G_{i(\underline{p})}$ und $H_{i(\underline{p})}$ ersetzt werden, welche gemäß

$$G_i = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$H_{i(\underline{p})} = \frac{G_{i+1(\underline{p})} - G_{i(\underline{p})}}{\Delta x_i}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \tag{8}$$

bestimmt werden. Die partiellen Ableitungen F'_x, F'_y werden für $x = x_i$, $y = Y_i$ berechnet.

Damit erhält Modell C die Form

$$y_i^c = Y_i + G_i(\underline{p})(x - x_i) + \frac{1}{2} H_1(\underline{p})(x - x_i)^2 \tag{9}$$

$$x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \quad i = 1, 2 \ldots N - 1$$

Das Modell C ist stückweise stetig, weil es aus Stücken quadratischer Parabeln besteht, aber an den Stützpunkten x_i ein endlicher Sprung vorhanden ist. Die Näherungsfunktion $y_a(x, p)$ wird vom Modell C gebildet. Da die Zerlegung (9) lokalen Charakter hat, erhalten wir, wenn wir die Längen der Abschnitte (x_i, x_{i+1}) genügend klein wählen, eine stückweise Polynom-Approximation $y^c(x, p)$ des eindeutigen Zweiges der impliziten Funktion, der durch Gleichung (2) für die vorgegebene Funktion $Y = Y(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_N$ bestimmt wird.

Aus den Formeln (4) und (9) ist ersichtlich, daß die Abweichung der Näherung $\Delta_a(x, p)$ in (4) eine stückweise

stetige Funktion ist. Im weiteren werden wir nur die Werte $\Delta_a(x_{i+1}, p)$ der genannten Funktion benutzen, welche sie bei der Näherung von links von x nach x_{i+1} annimmt:

$$\Delta_a(x_{i+1}, p) = -\Delta Y_i + G_i(p)\,\Delta x_i + \frac{1}{2} H_i(p)\,\Delta x_i^2, \qquad (10)$$

wobei $\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i$, $\quad i = 1, 2, \ldots, N-1$ ist.

Wir bemerken, daß $\Delta_a(x_1, p) = 0$ ist. Die Größen $\Delta_a(x_{i+1}, p)$ hängen nur vom Vektor p der gesuchten Parameter ab.

4. Methode zur Bestimmung der Parameter

Die Parameter p werden nach der Methode der kleinsten Quadrate gesucht, indem die Summe:

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} [\Delta_a(x_{i+1}, p)]^2 \qquad (11)$$

minimiert wird.

Die Bestimmung des Minimums der Funktion $S = S(p)$ der $n-1$ Veränderlichen kann auf der Grundlage der Methode der nichtlinearen Optimierung erfolgen.
Allerdings betrachten wir hier die Methode der analytischen Iteration zur Bestimmung des Minimums der Summe S, angewandt auf Koppelgetriebe, bei denen die Funktion $F(x, y, \underline{p})$ die Struktur eines verallgemeinerten Polynoms hat.

$$F(x, y, \underline{p}) = f_o(x, y) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f_k(x, y) + p_n \qquad (12)$$

Dabei sind $f_o(x, y), \ldots, f_{n-1}(x, y)$ linear unabhängige Funktionen.

Unter Verwendung von (10), (8) und (12) erlangt die Formel (11) folgende Struktur:

wobei

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} [\Delta Y_i + \frac{1}{2}(\frac{U_i}{V_i} + \frac{U_{i+1}}{V_{i+1}})\,\Delta x_i]^2 \qquad (13)$$

$$U_i = F'_x(x_i, Y_i, \underline{p}) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k a_{ki} + a_{oi}$$

$$V_i = F'_y(x_i, Y_i, \underline{p}) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k b_{ki} + b_{oi}$$

$$a_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial x}\Big|_{x=x_i, y=Y_i} \quad b_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial y}\Big|_{x=x_i, y=Y_i} \qquad (14)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1 \quad i = 1, 2, \ldots, N$

Das Minimum der Summe $S = S(\underline{p})$ erhalten wir aus dem Gleichungssystem $\frac{\partial S}{\partial pj} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, für dessen Lösung wir die Methode der iterierten Gewichte verwenden, eine Iterationsmethode der schrittweisen Näherung. In Übereinstimmung mit dieser Methode erhalten wir die Größen V_i, die in der 1. Näherung $(r = 1)$ gleich Eins gesetzt werden, bei den nachfolgenden Iterationen $(r \geqslant 2)$ durch die Formel

$$V_i^{(r)} = \sum_{k=1}^{n-1} p_k^{(r-1)} b_{ki} + b_{oi}, \qquad (15)$$

wobei r- die laufende Nummer der Iteration ist.
$p_k^{(r-1)}$ sind die Werte des Parameters p_k nach der $(r-1)$-ten Iteration. Im gegebenen Fall wird das oben erwähnte Gleichungssystem linear und läßt sich darstellen in der Form

$$\sum_{k=1}^{n-1} D_{kj}^{(r)} p_k^{(r)} + D_{oj} = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (16)$$

wobei

$$D_{lj}^{(r)} = \sum_{i=1}^{N-1} c_{li}^{(r)} c_{ji}^{(r)} \qquad l = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$c_{li}^{(r)} = \frac{a_{li}\Delta x_i + b_{li}\Delta Y_i}{V_i^{(r)}} + \frac{a_{li+1}\Delta x_i + b_{li+1}\Delta Y_i}{V_{i+1}^{(r)}} \qquad (17)$$

Beim wiederholten Lösen des Gleichungssystems für $r = 1, 2, 3 \ldots$ erhalten wir für jeden Iterationsschritt die Parameter $p_1^{(r)}, p_2^{(r)} \ldots, p_{n-1}^{(r)}$, und anschließend erhalten wir aus Gleichung (5) $p_n^{(r)}$.

Bei Beachtung der Bedingung:

$$\max_{k=1,2,\ldots,n-1} |\, p_k^{(r)} - p_k^{(r-1)} \,| < \epsilon_1, \quad r \leqslant m_1 \qquad (17)$$

wobei ϵ_1 und m_1 gegebene Zahlen sind (m_1 – ganzzahlig), konvergiert der Iterationsprozeß und die gesuchten Parameter p_k ergeben sich aus den $p_k^{(r)}$. Den durch den oben beschriebenen Algorithmus erhaltenen Vektor $\underline{p}$ bezeichnen wir mit $\underline{p}^{[1]}$.

5. Abschätzung der Qualität der Näherung

Nach der Bestimmung des Vektors $\underline{p} = \underline{p}^{[1]}$ ist es unumgänglich, die Qualität der Annäherung der Lagefunktion des entstandenen Getriebes an die vorgegebene Funktion zu bewerten. Mit diesem Ziel kann man die Analyse des synthetisierten Getriebes durchführen, wobei man diejenige Lagefunktion $y = y(x, \underline{p})$ der Montagevariante bearbeitet, welche am geringsten von der vorgegebenen Funktion $Y = Y(x)$ im gesamten Intervall $[0, a]$ abweicht. Wie schon oben bemerkt wurde, erfordert der Prozeß der Auswahl solcher Funktionen die automatische Identifizierung der Montagevarianten durch die EDVA, was mit einem großen Berechnungsaufwand verbunden ist.

Allerdings kann man vorläufig die Qualität der Näherung noch vor der Analyse des synthetisierten Getriebes bewerten. Dafür kann man anstatt der tatsächlichen Lagefunktion $y = y(x, \underline{p})$ zur Näherung die stetige Funktion (Modell D) nutzen in der Form:

$$y_i^D(x,p) = y_{i-1}^D(x_i,\underline{p}) + G_i(\underline{p})(x-x_i) + \frac{1}{2}H_i(\underline{p})(x-x_i)^2 \qquad (18)$$

$$x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1};\ i = 1, 2, \ldots, N-1;\ y_o^D(x_1,\underline{p}) = Y_1$$

Modell D erhält man aus Modell C, indem man die letzten Sprünge in den Knotenpunkten $x = x_i$ beseitigt. Auf der Grundlage von Gl. (18) und mit Berücksichtigung von (8) erhalten wir den nächsten Wert y_i der Funktion $y^D(x, p)$ in den Punkten $x = x_i$.

$$y_i = y^D(x_i,p) = Y_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-1}[G_k(\underline{p}) + G_{k+1}(\underline{p})]\Delta x_k \qquad (19)$$

$$i = 2, 3, \ldots, N;\quad y_1 = 0$$

Die erhaltenen Werte y_i können für die vorläufige Schätzung der Qualität der Näherung genutzt werden. Für diesen Zweck wird z. B. das Kriterium $K = \max |y_i - Y_i|$, $i = 1, \ldots N$ ausgewählt.

6. Präzisierung der Parameterwerte

In dem Fall, wenn sich die Bewertung durch das Kriterium K als ungünstig erweist, muß man die Werte der zu berechnenden Parameter P präzisieren und als Anfangswerte die früher gefundenen Werte $\underline{p}^{[1]}$ nehmen. Dabei wird eine nochmalige Berechnung mit den Formeln (14) – (17) durchgeführt, in welchen die partiellen Ableitungen in den Punkten $(x_i, y_i^{[1]})$ $i = 1, 2 \ldots N$ berechnet werden.

Als Ergebnis erhält man den Vektor $\underline{p} = p^{[2]}$ und die Werte $y_i^{[2]}$ der Approximierungsfunktion $y^D(x, \underline{p}^{[2]})$ in den Punkten $x = x_i$ $(i = 1, \ldots, N)$. Bei Bedarf kann der genannte Iterationsprozeß auf diese Weise fortgesetzt werden. Das Kriterium der Konvergenz des Iterationsprozesses ist die Erfüllung der Ungleichungen:

$$\max_{i=1,\ldots,n-1} |p_i^{[m]} - p_i^{[m-1]}| < \epsilon_2 \quad m \leqslant m_2 \qquad (20)$$

wobei ϵ_2 und m_2 gegebene Zahlen sind (m_2 – ganzzahlig).

Nach der Bestimmung der Koeffizienten $\underline{p} = \underline{p}^{[m]}$ des verallgemeinerten Polynoms (12) ergeben sich die Parameter $\underline{q} = (q_1 \ldots q_n)^T$ des synthetisierten Getriebes.

Im allgemeinen bedeutet die Erfüllung der Bedingung (20) noch nicht, daß die erhaltene Lösung der Syntheseaufgabe keinen Verzweigungsdefekt hat, da bei der Bildung des Approximationsmodells eine Reihe von Annahmen gemacht wurden (siehe oben). Werden günstige Parameter gewählt, die in den Annahmen erscheinen und gleichfalls den Iterationsprozeß regulieren, kann man praktisch einen Verzweigungsdefekt ausschließen. Nach der Bestimmung von $\underline{p} = \underline{p}^{[m]}$ ist es notwendig, eine Analyse des synthetisierten Getriebes durchzuführen und die Qualität der Näherung zu prüfen.

7. Beispiel

Nun soll die Anwendung der beschriebenen Methode zur Synthese fünfgliedriger räumlicher Getriebe RRRSP (R – Drehgelenk, S – Kugelgelenk, P – Schubgelenk) allgemeiner Art betrachtet werden, falls 4 Parameter zu bestimmen sind. Getriebe des Typs RRRSP haben 10 konstante Parameter (Bild 4) [4]: h_o, Θ_o, l_{o1}, h_1, Θ_1, l_{12}, h_2, Θ_2, l_{23}, h_3.

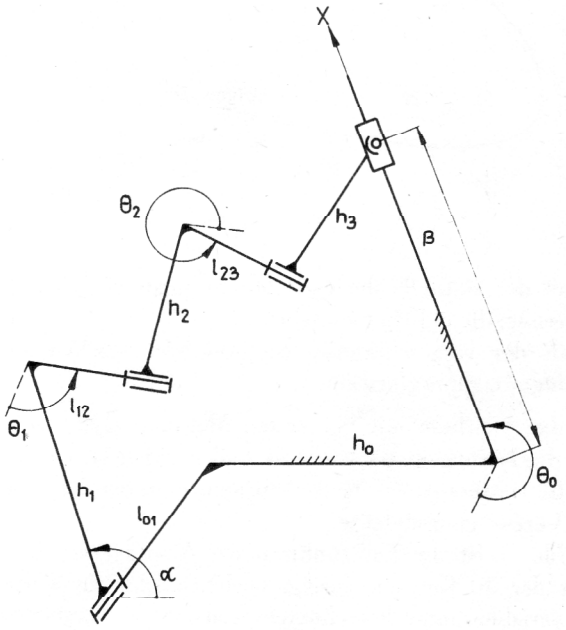


Bild 4

Wir bezeichnen mit $x = \alpha - \alpha_o$ den Drehwinkel des Antriebsgliedes in Grad und mit $y = \beta - \beta_o$ die lineare Verschiebung des Abtriebsgliedes in mm. Mit Hilfe des Getriebes RRRSP soll eine lineare Abhängigkeit $Y(x) = kx, 0 \leqslant x \leqslant 50°$, $k = 1\ \frac{mm}{Grad}$ realisiert werden.

Nehmen wir $N = 51$, $\Delta x = 1°$, $x_i = (i-1)\Delta x$, wobei $i = 1, 2, \ldots, N$ ist.

Weiterhin sei

$$h_o = 20,\ \Theta_o = 330°,\ l_{o1} = 30,\ h_1 = 30,\ l_{12} = 10,\ \alpha_o = 0°$$

(alle Längen in mm). Die Parameter Θ_1 und α_o werden variiert im Bereich von 0° – 330° mit einer Schrittweite von 30°. Das ergibt insgesamt 144 mögliche Kombinationen. Die Ermittlung der 4 Berechnungsparameter h_2, Θ_2, l_{23}, h_3 erfolgt entsprechend des Algorithmus bei jeder Kombination der genannten variierten Parameter.

Die Synthese des Getriebes RRRSP wurde mit 2 Methoden durchgeführt.

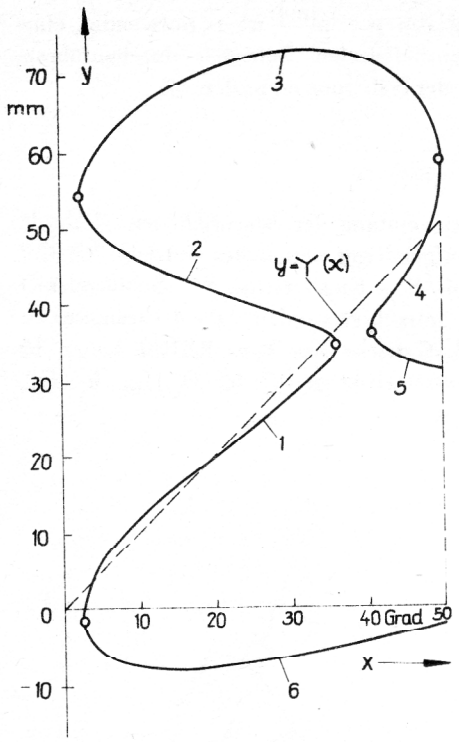


Bild 5

1. mit der Methode der gewichteten quadratischen Näherung, die in [4] beschrieben ist.
2. mit der vorgeschlagenen Methode der stückweisen Polynomapproximation.

Bei der Synthese mit der ersten Methode zeigte sich, daß die Lösung in 63 von 144 Fällen existiert. Bei 40 von 63 synthetisierten Getrieben fand man bei der Analyse Verzweigungsdefekte.

In Bild 5 ist die Lagefunktion der Montagevarianten eines der 40 Getriebe gezeigt, welches folgende Werte der variablen und berechneten konstanten Parameter hat:

$$\Theta_1 = 240^\circ, \quad \alpha_o = 0^\circ, \quad h_2 = 21{,}208, \quad \Theta_2 = 144{,}299.$$
$$l_{23} = 8{,}087, \quad h_3 = 18{,}750.$$

Von 23 Getrieben ohne Verzweigungsdefekt ist bei 12 Getrieben $\Delta_{max} = 0.5$ mm, wobei Δ_{max} die maximale Abweichung im vorgegebenen Abschnitt ist. Das Getriebe mit dem geringsten Wert $\Delta_{max} = 0{,}02$ mm hat folgende Parameter:

$$\Theta_1 = 0^\circ, \quad \alpha_o = 300^\circ, \quad h_2 = 71{,}222, \quad \Theta_2 = 92{,}61^\circ$$
$$l_{23} = 27{,}466, \quad h_3 = 86{,}817.$$

Die Werte der 6 anderen Parameter sind oben angegeben. Bei der Synthese des RRRSP-Getriebes mit der zweiten Methode wurden in 10 von 144 Fällen Lösungen erhalten. Die Analyse der zehn synthetisierten Getriebe zeigte, daß alle ohne Verzweigungsdefekt waren und außerdem bei neun Getrieben $\Delta_{max} < 0{,}5$ mm war. Das Getriebe mit dem geringsten Wert $\Delta_{max} = 0{,}013$ mm hat die Parameter

$$\Theta_1 = 0^\circ, \quad \alpha_o = 300^\circ, \quad h_2 = 72{,}352, \quad \Theta_2 = 92{,}639,$$
$$l_{23} = 27{,}416, \quad h_3 = 88{,}031.$$

LITERATUR

[1] Gupta, K. C., Finubu, S. O.: Synthesis of Bimodal Funktion Generating Mechanisms Without Branch Defect. Trans. ASME: J. Mech. Transmiss. and Autom. Des., 105(1983)4, pp. 641 – 648.

[2] Sandor, G. N., Zhuang, X.: On the elimination of the Branching Problem in the Synthesis of Spatial Motion Generators With Spheric Joints. Trans. ASME: J. Mech. Transmiss. and Autom. Des., 106(1984)3, pp. 312 – 326

[3] Tinubu, S. O., Gupta, K. C.: Optimal Synthesis of Function Generators without the Branch Defect. Trans. ASME: J. Mech. Transmiss. and Autom. Des., 106(1984)3, pp. 348 – 354

[4] Пейсах Э. Е., Пирожков М. А.: Квадратический синтез пространственного передаточного механизма ВВВСП общего вида с определением четырех параметров / Известия ВУЗов. Машиностроение (1986) № 3. С. 53 – 58.

[5] Пейсах Э. Е.: Решение задачи о положениях звеньев пятизвенного пространственного механизма ВВСВВ / Машиноведение (1984), № 1. С. 42 – 48.

[6] Левитский Н. И.: Синтез механизмов по Чебышеву. М.-Л.: Издат. АН СССР. 1946, 168 с.

[7] Sutherland, G. H., Roth, B.: An improved Least-Squares Method for Designing Function-Generating Mechanisms. Trans. ASME, Serie B. 97(1975)1, pp. 303 – 307.

[8] Калиткин, Н. Н.: Численные методы. М.: Наука. 1978. 512 с.